



Algoritmo de tomografía local basado
en la transformada discreta wavelet

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar el
título de Magíster en Matemáticas Aplicadas

Amed Alfonso Alfonso Cristancho

Lucio Rojas Cortés

Directores

Jairo Villegas G

Gustavo A. Mejía Q.

Departamento de Ciencias Básicas
Universidad EAFIT
Medellín

Agradecimientos

Deseamos expresar un agradecimiento especial a los Doctores Jairo Villegas Gutiérrez y Gustavo A. Mejía Q. por su valiosa colaboración, asesoría y sugerencias en la elaboración de este trabajo de investigación. Las indicaciones dadas por ellos, fueron de vital importancia, ya que gracias a ellas se fueron haciendo las correcciones necesarias hasta obtener el presente trabajo de investigación.

De igual manera queremos agradecer a la Universidad Central, por que gracias a su decidida gestión y apoyo financiero fue posible la elaboración de esta tesis.

Un agradecimiento particular a la Doctora Edel Serrano Iglesias directora del Departamento de Matemáticas de la Universidad Central, porque gracias a su gran colaboración y su incondicional apoyo fue posible la realización de este trabajo.

Agradecemos a la Universidad EAFIT-Medellín por brindarnos el espacio físico y los recursos bibliográficos necesarios para el desarrollo de esta investigación.

Índice general

Introducción	1
1. Terminología y preliminares	5
1.1. Introducción	5
1.1.1. Proyección	5
1.1.2. Retroproyección	6
1.1.3. Tomografía Global	7
1.2. Preliminares matemáticos	8
1.2.1. Transformadas	9
1.3. Geometría del arreglo fuente-objeto-detector	11
1.3.1. Técnicas de adquisición de datos	11
1.3.2. Geometría del arreglo fuente-objeto-detector	13
1.3.3. Componentes de un Tomógrafo	15
1.3.4. Funcionamiento Básico	17
2. Las transformadas de Radon y wavelet	19
2.1. Introducción	19
2.2. La transformada de Radon en \mathbb{R}^n	19
2.3. La transformada de Radon en \mathbb{R}^2	20
2.4. Propiedades de la transformada de Radon	24
2.4.1. Linealidad	24
2.4.2. Periodicidad	24

2.4.3.	Traslación	25
2.4.4.	Escalamiento	25
2.5.	Sinograma	28
2.6.	Transformada wavelet	28
2.6.1.	Función $\Psi_{a,b}(t)$	28
2.6.2.	Transformada wavelet continua	29
2.6.3.	Transformada Wavelet Discreta	30
2.6.4.	Análisis Multirresolución	32
2.6.5.	Base Dual	34
2.6.6.	Funciones Separables	35
2.7.	Momentos de desvanecimiento	36
2.8.	Las wavelets Daubechies	36
2.8.1.	Construcción de las wavelets de Daubechies	38
3.	El problema de la tomografía local	45
3.1.	Introducción	45
3.2.	El teorema de cortes de Fourier en \mathbb{R}^n	45
3.3.	Operador de retroproyección	48
3.4.	Fórmula de retroproyección filtrada	49
3.5.	Fórmula de inversión de Fourier \mathbb{R}^n	49
3.6.	El Operador potencial de Riesz	49
3.7.	El problema de la tomografía local	51
3.8.	Porqué usar wavelets	53
3.8.1.	Atacando el problema	53
3.9.	Algoritmo de reconstrucción local	54
3.9.1.	Fórmula de reconstrucción	55
3.9.2.	Bases wavelets separables	59
3.9.3.	Descomposición de imágenes usando wavelets	67
3.9.4.	Coefficientes wavelet de la transformada de Radon	68
4.	Resultados y Conclusiones	73
4.1.	Introducción	73
4.2.	Figuras de Pruebas	73
4.3.	Wavelet Daubechies 4	77
4.4.	Wavelet Daubechies 6	80
4.5.	Wavelet Daubechies 10	83
4.6.	Conclusiones	86
4.7.	Trabajos futuros	88

Introducción

La tomografía es la reconstrucción de la imagen de una sección transversal de un objeto, a partir de sus proyecciones.

El objetivo de todas las modalidades de la imagen médica es visualizar los órganos internos del cuerpo de una manera no invasiva, para obtener información estructural y anatómica como en la TC (Tomografía Computarizada). La reconstrucción de la imagen a partir de un conjunto infinito de proyecciones se conocía desde 1917 cuando Johann Radon publicó un artículo donde apareció la transformada que hoy lleva su nombre. Esta transformada nos indica que la imagen de un objeto está precisa e inequívocamente determinada por el conjunto infinito de todas sus proyecciones. Sin embargo, en la práctica no existe un número infinito de proyecciones, las proyecciones no son infinitamente delgadas y además poseen errores experimentales. Por lo tanto lo que se precisa no es una fórmula idealizada, sino un algoritmo eficiente para calcularla.

Conociendo el conjunto de proyecciones se puede reconstruir la imagen con la transformada inversa de Radon. Algunos algoritmos para aproximar la transformada inversa de Radon son: métodos directos de Fourier, retroproyección y convolución en el espacio de la señal, retroproyección y convolución en el espacio de la frecuencia filtrada, métodos iterativos, etc.

En algunas situaciones, a los médicos les interesa únicamente la imagen de un área local del cuerpo. Por lo tanto, no se requiere exponer al paciente a grandes cantidades de radiación o exposición a los rayos X.

La transformada de Radon plantea el problema de que su inversa no

2 Introducción

es local en dimensiones pares. En este trabajo veremos como las wavelets Daubechies 4, 6 y 10 se convierten en una herramienta valiosa para el estudio de tomografía local. El uso de las wavelets fue propuesto anteriormente en otros trabajos y fueron implementados exitosamente siendo toda la región de interés reconstruida con significativa reducción de la exposición de los rayos X, incluyendo en dimensiones pares. Algoritmos asociados con las wavelets permiten reconstruir las regiones locales de interés sin exponer a los pacientes a grandes dosis de radiación. Además, los momentos de desvanecimiento de las wavelets pueden ser preservados, por la transformada de Hilbert mejorando las fórmulas de inversión para lo local.

El nacimiento de la Neuroradiología tuvo lugar cuando el señor Wilhelm C. Roentgen comprobó por primera vez la visualización no invasiva de los huesos y los tejidos blandos de una criatura viva mediante unas imágenes sustituyendo así una pantalla fluorescente por una placa fotográfica. Roentgen convenció a su esposa para que fuera sujeto de experimento, colocando su mano sobre un chasis cargado con una película fotográfica y realizando una exposición de 15 minutos; el esqueleto de sus dedos era una premonición ambigua de la potencia de la técnica que consistía en una cabina metálica en un cuarto oscuro. Introdujo una lámina de aluminio de 1mm de grueso en un lado de la cabina con paredes de zinc, para proteger a la persona de la radiación.

En diciembre de 1896 obtuvo copias de las imágenes grabadas de los rayos X, y por esto le denominaron los Rayos de Roentgen que empezaron a ser muy importantes para el diagnóstico médico. Posteriormente perfeccionaron la técnica para mejorar las imágenes y no exponer al paciente a prolongadas sesiones de rayos X. En esta década muchos médicos cirujanos estaban interesados en el diagnóstico del cerebro mediante los rayos X, que consistía en fotografiar el cerebro humano. En febrero del mismo año Thomas A. Edison se interesó en el proyecto pero más adelante lo abandonó atribuyendo parte de la culpa a la estructura del cráneo. La principal aplicación de los rayos X, el diagnóstico neurológico consistía en encontrar cuerpos extraños (tumores) y fracturas.

A finales del Siglo XIX y principios del Siglo XX, varios científicos tales como Harrey Cushing, el primero en utilizar los rayos X para el diagnóstico de pacientes con trastorno neurológico. Arthur Schüller, considerado el padre de la neuroradiología, publicó el libro de radiología del cráneo referente a identificar la glándula pineal calcificada benignas y malignas y el tratamiento de tumores de la hipófisis. Adicionalmente, Schüller publicó 300 libros

dedicados a la neuroradiología, cirugía y psiquiatría. Mencionemos también a Egas Monizz (1874-1955), que contribuyó al desarrollo de la arteriografía carótida, a Erik Lysholm (1892-1947) que ha sido relacionado con la radiología de precisión y por último a Godfrey Hounsfield que recibió el Premio Nobel en 1979 por sus trabajos en Tomografía Computarizada.

La tomografía computarizada consiste en obtener imágenes médicas para determinar la anatomía interna de un paciente vivo sin necesidad de recurrir a los métodos invasivos, y diagnosticar diferentes situaciones patológicas del paciente para posteriormente aplicar un tratamiento más preciso. Existen dos conceptos fundamentales en la obtención de imágenes del cuerpo humano que son localización y contraste.

Una imagen puede considerarse como una representación o mapa de la distribución espacial de algunas propiedades seleccionadas del tejido. En una imagen, un pixel, es un elemento de la imagen que representa la relación espacial de la localización de este valor con respecto a otros valores medidos, es decir, el pixel localiza el valor medido. El contraste de imagen se refiere a las diferencias de los valores del pixel entre una localización y las de su entorno en general. La tomografía computarizada y la resonancia magnética son modalidades digitales; son muestreos de señales analógicas continuas para la formación de imágenes que implica la reconstrucción de objetos a partir de proyecciones.

El propósito de este trabajo es desarrollar un algoritmo para la reconstrucción local de imágenes tomográficas.

El capítulo uno contiene conceptos preliminares matemáticos, la geometría del arreglo fuente-objeto-detector, las partes y funcionamiento de un tomógrafo. En el capítulo dos se define la transformada de Radon, se presentan algunas de sus propiedades y se ilustran varios ejemplos de la transformada de Radon. Además contiene una introducción a la teoría wavelet tomando en particular la wavelet Daubechies 4. En el capítulo tres se desarrolla el operador de retroproyección filtrada y el teorema de cortes de Fourier. Se explica el algoritmo de reconstrucción tomográfica.

En el capítulo cuatro se presentan los resultados del algoritmo de tomografía local propuesto en este trabajo y las conclusiones.

CAPÍTULO 1

Terminología y preliminares

1.1. Introducción

La Tomografía Computarizada (TC), es un método imagenológico de diagnóstico médico, que permite observar el interior del cuerpo humano, a través de cortes milimétricos transversales al eje céfalo-caudal, mediante la utilización de los rayos X . Posibles usos de este método diagnóstico, son: anormalidades del cerebro y médula espinal, tumores cerebrales y accidentes cerebro vasculares, sinusitis, aneurisma de aorta, infecciones torácicas, enfermedades de órganos como el hígado, los riñones y los nódulos linfáticos del abdomen entre otros [11]. En esta sección se presenta el marco teórico matemático que permite el desarrollo de un algoritmo para la tomografía local. Se explica el tipo de arreglo geométrico para la terna $\langle \textit{fuente}, \textit{objeto}, \textit{detector} \rangle$. Por último, se ilustran los componentes de un tomógrafo.

1.1.1. Proyección

Un paciente puede describirse como una distribución de propiedades en tres dimensiones $f(x, y, z)$, es decir, una localización espacial en el punto (x, y, z) donde se le hacen cortes transversales para obtener las imágenes de

6 Terminología y preliminares

tomografía computarizada y resonancia magnética denominadas propiedades diferentes en cada punto.

Un rayo X que penetra a un objeto o un tejido se puede medir mediante la ecuación de absorción dada por

$$I = I_0 e^{-af} \quad (1.1.1)$$

donde I es la intensidad medida que queda del haz incidente I_0 , a es la longitud de la trayectoria del haz de luz a través del objeto y e es el coeficiente de atenuación del material o tejido.

La ecuación (1.1.1) se puede reescribir como

$$I = I_0 e^{-\int L f(x,y,z) da}.$$

Esta ecuación indica que la absorbancia del haz por el tejido puede describirse en términos de una integral de línea sobre las contribuciones de la absorbancia a lo largo de la trayectoria del haz.

El conjunto de trayectorias del haz se denomina proyecciones, y una proyección es esencialmente la sombra medida del objeto. Dicho de otra manera, los rayos X convencionales emplean una película plana (imagen) para registrar una proyección bidimensional de un objeto tridimensional.

El proceso de medida de la proyección de un objeto se puede ver como un mapa 2D de un objeto $f(x, y)$ de algunos parámetros característicos medidos con cierto ángulo θ y a cierta distancia r a lo largo de la proyección unidimensional, si este proceso se repite en múltiples ángulos alrededor del objeto, los datos obtenidos son un conjunto de proyecciones.

1.1.2. Retroproyección

Para reconstruir la distribución del objeto es necesario encontrar la transformada de Radon inversa. La retroproyección de la transformada de Radon se realiza sobre una matriz discreta de localizaciones que es el tamaño del campo de visión de la imagen. La atenuación medida se divide por igual entre los píxeles en la trayectoria del haz de luz medido. El procedimiento de retroproyección produce una estimación borrosa de un objeto, por esta razón es importante utilizar un filtro o cálculo matemático diseñado para cancelar el proceso de difuminación de la imagen y recuperarla en forma más nítida. Por lo tanto, puede conseguirse la transformada de Radon inversa mediante retroproyección más filtración. Existe un proceso de

filtración que se denomina convolución que consiste en filtrar las proyecciones antes de la retroproyección para luego reconstruir la imagen nítida del objeto original.

La transformada de Radon es un ejemplo de los problemas inversos ya que conocidos los valores de esta transformada se desea determinar la función $f(x, y)$. Por lo general los problemas inversos son problemas mal condicionados ya que no cumplen al menos una de las siguientes propiedades:

- Existe solución para el problema.
- La solución que existe es única.
- La solución es estable, es decir depende continuamente de los datos.

La transformada de Radon es un problema mal condicionado, dado que no cumple con la propiedad de estabilidad. Cuando el problema cumple con las tres propiedades se dice que esta bien condicionado.

1.1.3. Tomografía Global

Así como la tomografía es utilizada en el campo de la medicina como un instrumento de diagnóstico de un paciente, también es utilizada en el campo de las exploraciones geológicas específicamente en la caracterización de cavidades en el subsuelo mediante la interpretación de perfiles de tomografía eléctrica.

Es posible que algunas técnicas de tomografía global sirvan también para descubrir yacimientos de petróleo, minería o estudios de la estructura interna de un avión o nave espacial o un megaproyecto de ingeniería civil como un edificio o un puente, etc. En medicina se utiliza una técnica de tomografía global denominada la tomografía por emisión de positrones (PET, sigla en inglés de Positron Emission Tomography) es una técnica diagnóstica de medicina nuclear, no invasiva, que analiza el cuerpo entero en una sola sesión y que permite la adquisición de imágenes de la actividad tumoral mediante la administración de diversos radiofármacos emisores de positrones. En algunos casos específicos la tomografía global con la técnica de la tomografía eléctrica [48] se utiliza en ingeniería civil con el objeto del estudio geotécnico realizado para evaluar la factibilidad de construir viviendas en un suelo sumamente fracturado. La tomografía del subsuelo determina a partir de los valores de resistividad el tipo de rocas del cual está formada y demuestra que los

porcentajes aproximados de saturación por agua dulce son muy elevados. A partir de estas evidencias es posible recomendar medidas preventivas que ayuden en la toma de decisiones sobre la posibilidad de construir o no. Es posible considerar entonces que la tomografía geoelectrica posee un elevado potencial como herramienta de estudio y exploración del subsuelo.

1.2. Preliminares matemáticos

Un espacio de Hilbert es un espacio con producto interno $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que es completo para la norma definida por ese producto interno [10, 11].

Para un intervalo $a \leq t \leq b$, el espacio $L^2([a, b])$ es el conjunto de funciones cuadrado integrables sobre $a \leq t \leq b$, en otras palabras,

$$L^2([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

La condición $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$ significa físicamente que la energía total de la señal es finita. El producto interior sobre $L^2([a, b])$ se define como

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_a^b |f(t)\overline{g(t)}| dt \text{ para } f, g \in L^2([a, b]).$$

La esfera de dimensión $(n - 1)$ se denota por S^{n-1} y está contenida en \mathbb{R}^n . Un elemento $\theta \in S^{n-1}$ se expresa como

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \text{ con } \sum_{i=1}^n \theta_i^2 = 1.$$

Parametrizando $\vec{\theta} \in S^1$ por su ángulo polar θ , el vector $\vec{\theta}$ queda definido por

$$S^1 = \left\{ \vec{\theta} = (\cos \theta, \sin \theta) \right\},$$

donde θ es el ángulo generado por $\vec{\theta}$ y el eje x .

Se define un vector $\vec{\theta}^\perp$ ortogonal a $\vec{\theta}$ tal que, $\vec{\theta}^\perp = (-\sin \theta, \cos \theta)$.

P^n denota el espacio de todos los hiperplanos [32, 39] en \mathbb{R}^n . Cada hiperplano $E \in P^n$ se puede escribir como $E = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, w \rangle = P\}$,

donde \langle, \rangle es el producto interior usual $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ es un vector unitario y $p \in \mathbb{R}$.

Una imagen a nivel de gris es una función bidimensional de la intensidad de luz definida como

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = vu$$

con $0 < v < \infty$ y $0 < u < 1$, donde v es la cantidad de luz incidente en la escena y u es la cantidad de luz reflejada por el objeto en la escena.

Se llama nivel de gris a la intensidad de luz de una imagen, esta intensidad por lo general toma valores en el intervalo $[0, 1]$ donde $l = 0$ es negro y $l = 1$ es blanco, el resto son valores de grises que varían de negro a blanco.

Sea S un conjunto, la función característica o función indicadora se define por

$$\chi_s(x) = \begin{cases} 1, & x \in S, \\ 0, & x \notin S. \end{cases}$$

1.2.1. Transformadas

La transformada de Fourier [7, 10, 70] de una función $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se define por

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx,$$

y la transformada inversa de Fourier por

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi.$$

En dos dimensiones, la transformada de Fourier de una función $f(x, y)$ definida en el plano xy , continua e integrable, es la función compleja $F(u, v)$ determinada por la fórmula

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(ux+vy)} dx dy.$$

La transformada inversa está dada por

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi i(ux+vy)} du dv.$$

Ejemplo 1.2.1. Calcular la transformada de Fourier de la función

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}.$$

Solución

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - y^2} e^{-2\pi i(ux + vy)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - 2\pi iux} e^{-y^2 - 2\pi ivy} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - 2\pi iux - \pi^2 i^2 u^2 + \pi^2 i^2 u^2} e^{-y^2 - 2\pi ivy - \pi^2 i^2 v^2 + \pi^2 i^2 v^2} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x + i\pi u)^2} e^{-\pi^2 u^2} dx \right) e^{-(y + i\pi v)^2} e^{-\pi^2 v^2} dy \\ &= e^{-\pi^2 u^2} \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y + i\pi v)^2} e^{-\pi^2 v^2} dy = \pi e^{-\pi^2(u^2 + v^2)}. \end{aligned}$$

Para el caso discreto, la transformada discreta de Fourier de $f(n, m)$ se define por

$$H(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} f(n, m) e^{\frac{-2\pi i(nu + mv)}{N}},$$

y su inversa

$$f(n, m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} H(u, v) e^{\frac{2\pi i(nu + mv)}{N}}.$$

También es de interés para nuestro estudio la transformada de Hilbert. Comúnmente las funciones o señales se definen completamente en el dominio del tiempo o en el de la frecuencia, y la transformada de Fourier realiza un cambio de la función o señal de un dominio a otro. La transformada de Hilbert, \mathcal{H} , conforma la señal con la mitad de la información en el dominio del tiempo y la otra mitad en el dominio de la frecuencia. Para una función o señal $s(t)$, la transformada de Hilbert se define por medio de la convolución de $s(t)$ y $\frac{1}{\pi t}$ obteniendo

$$\hat{s}(t) = \mathcal{H}\{s\}(t) = (h * s)(t) = \frac{1}{\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau,$$

donde $h(t) = 1/\pi t$ y considerando la integral como el valor principal (vp), lo que evita la singularidad $t = \tau$. Dicha fórmula es equivalente a una rotación de $\pi/2$ en la fase de cada componente armónica de la señal. Dicho de otra manera, la transformada de Hilbert puede construir la señal analítica de $s(t)$ como

$$s_a(t) = s(t) + i\hat{s}(t),$$

donde la parte real de $s_a(t)$ es la señal en el tiempo, mientras la parte imaginaria $\hat{s}(t)$ es la señal en la frecuencia.

1.3. Geometría del arreglo fuente-objeto-detector

1.3.1. Técnicas de adquisición de datos

La tomografía computarizada (TC), es un método imagenológico de diagnóstico médico, que permite observar el interior del cuerpo humano, a través de cortes milimétricos transversales al eje céfalo-caudal, mediante la utilización de los rayos X.

Este método de diagnóstico permite observar anormalidades del cerebro y médula espinal tales como:

- Tumores cerebrales.
- Accidentes cerebro vasculares.
- Sinusitis.
- Enfermedades del hígado.
- Enfermedades de los riñones y de otros órganos [15].

En la Figura 1.1 se muestran las diferentes técnicas de adquisición de datos con sus diferentes elementos y características.

12 Terminología y preliminares

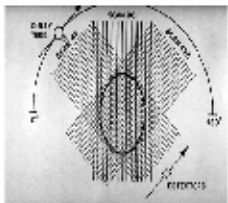
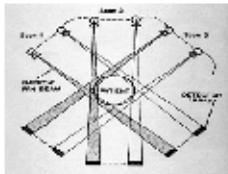
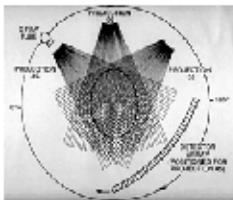
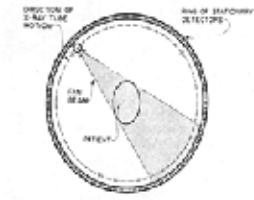
Generación	Elementos	Características
Primera Generación	<p>Un solo Detector (Traslación y Rotación)</p> 	<ul style="list-style-type: none"> -160 trayectorias paralelas mediante la traslación del tubo emisor y del detector. - Se gira todo el conjunto 1 grado. - Se realizan nuevamente las operaciones 1 y 2, hasta que el conjunto gire 180°
Segunda Generación	<p>Múltiples Detectores (Traslación / Rotación)</p> 	<ul style="list-style-type: none"> -Forma un haz haz de rayos X en forma de abanico con un ángulo de apertura de 5° aproximadamente. - El número de detectores oscila entre 10 y 30, dispuestos linealmente formando un vector - Logra reducir la exploración a dos minutos.
Tercera Generación	<p>Rotación/Rotación</p> 	<ul style="list-style-type: none"> -haz de rayos X de ancho, entre 25° y 35°, que cubre toda el área de exploración - arco de detectores con un número de elementos, entre 300 y 500. - la rotación del tubo y el banco de detectores es de 360°. - Se reduce considerablemente el tiempo de exploración a sólo 2 o 3 segundos y se aprovecha eficientemente la radiación del tubo
Cuarta Generación	<p>Rotación/Estacionario y Rotación/Nutación</p> 	<ul style="list-style-type: none"> - Utiliza un anillo fijo de detectores dentro del cual gira el tubo de rayos X - El detector gira a velocidades altas, disminuyendo el tiempo de exploración. - El sistema es poco sensible a las variaciones o diferencias de comportamiento entre los detectores. - Es muy costoso, por el gran número de detectores - El modelo (Rotación/Nutación) utiliza un anillo de detectores, en el que el tubo de rayos X gira por fuera del anillo oscilando a una pequeña amplitud del eje de rotación para permitir el paso del haz de rayos X. - Es muy complejo y costoso - Se han obtenido exploraciones de muy alta resolución en un segundo.

Figura 1.1: Técnicas de adquisición de datos.
Fuente: Adaptado de Corbo Pereira, D.N. *Tomografía Axial Computarizada*. XIII Seminario de Ingeniería biomédica 2004. Facultad de Medicina e Ingeniería. Universidad de la Republica Oriental de Uruguay.

1.3.2. Geometría del arreglo fuente-objeto-detector

La geometría del arreglo fuente-objeto-detector [34] usada en la tecnología de primera generación corresponde a la de rayos paralelos como se ilustra en la Figura 1.2. Las distintas proyecciones se obtienen cambiando la geometría del arreglo fuente-objeto-detector.

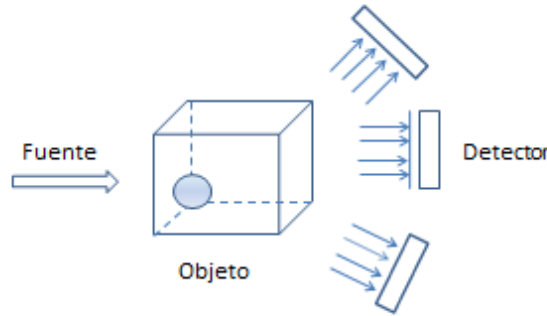


Figura 1.2: Geometría del arreglo fuente-objeto-detector

De acuerdo con la Figura 1.3 se construye una ecuación del rayo \overrightarrow{AB} que se adecúe a los propósitos de éste trabajo. Se dibuja otro sistema de coordenadas rotado θ grados, de manera que la dirección del rayo \overrightarrow{AB} mostrado en la Figura 1.4 defina una dirección perpendicular a t donde se proyecta el rayo.

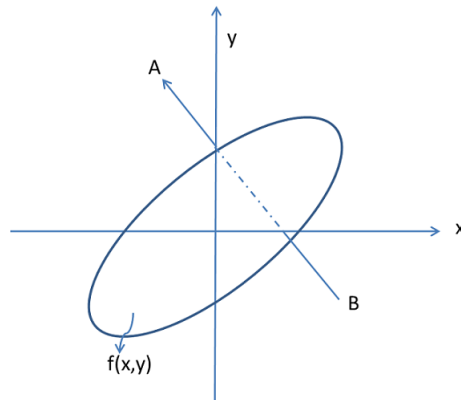


Figura 1.3: Ecuación del rayo

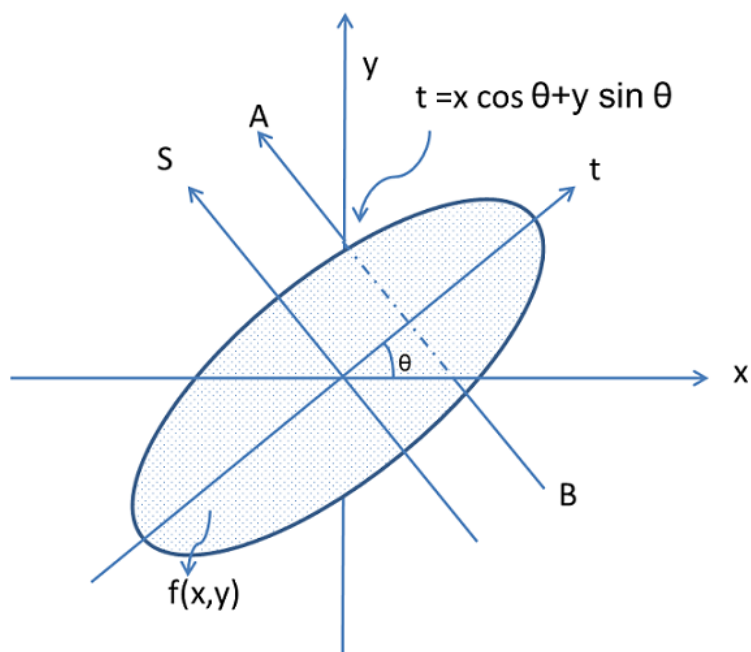


Figura 1.4: Sistema de coordenadas rotado

La relación existente entre los dos sistemas se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

De donde se establecen las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = t \cos \theta - s \sin \theta \\ y = t \sin \theta + s \cos \theta \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} t = x \cos \theta + y \sin \theta \\ s = y \cos \theta - x \sin \theta \end{cases}$$

La ecuación para el rayo \overrightarrow{AB} es $t = x \cos \theta + y \sin \theta$.

1.3.3. Componentes de un Tomógrafo

Todos los equipos de tomografía axial computada están compuestos básicamente por tres grandes módulos o bloques, estos son: el gantry, la computadora y la consola.

A. Gantry

El gantry es el lugar físico donde se introduce el paciente para su examen. En él se encuentran, el tubo de rayos X, el colimador, los detectores, el DAS y todo el conjunto mecánico necesario para realizar el movimiento asociado con la exploración (ver Figura 1.5).

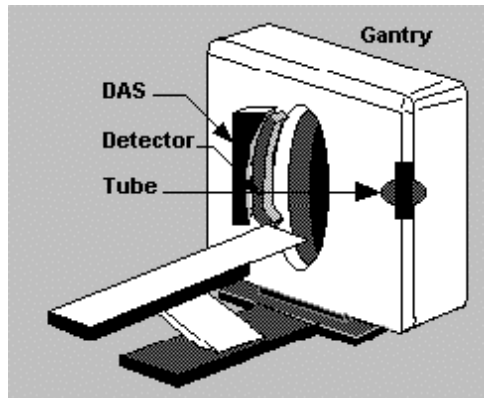


Figura 1.5: Gantry.

Fuente: Corbo Pereira, D.N. *Tomografía Axial Computarizada*. XIII Seminario de Ingeniería biomédica 2004. Facultad de Medicina e Ingeniería. Universidad de la Republica Oriental de Uruguay.

Hay dos tipos de gantry, los que rotan 360° y cambian de dirección y los de rotación continua (son los más modernos y se utilizan en los sistemas helicoidales, que se diferencian porque la energía y la transmisión de las señales adquiridas, llega a través de anillos deslizantes).

1) Tubo de rayos X

El tubo de rayos X es un recipiente de vidrio al vacío, rodeado de una cubierta de plomo con una pequeña ventana que deja salir las radiaciones al exterior.

16 Terminología y preliminares

2) Colimador

Es un elemento que permite regular el tamaño y la forma del haz de rayos (ver Figura 1.6). Aquí es donde se varía el ancho del corte tomográfico. Este puede variar de 1 a 10 mm de espesor.

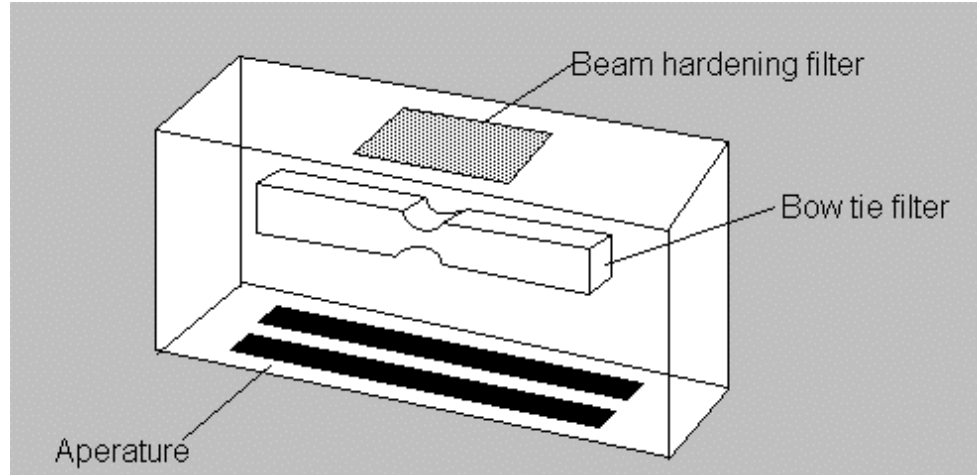


Figura 1.6: Esquema del colimador.

Fuente: Corbo Pereira, D.N. *Tomografía Axial Computarizada*. XIII Seminario de Ingeniería biomédica 2004. Facultad de Medicina e Ingeniería. Universidad de la Republica Oriental de Uruguay.

3) Detectores

Los detectores reciben los rayos X transmitidos después que atravesaron el cuerpo del paciente y los convierten en una señal eléctrica. Existen 2 tipos de detectores:

- Detectores de gas Xenón: El detector es una cámara que contiene el gas Xenón a alta presión y un par de placas. El rayo entrante ioniza el gas y los electrones son atraídos por la placa cargada positivamente. Luego la corriente generada es proporcional a la cantidad de rayos absorbidos.
- Detectores de cristal o de estado sólido: Están hechos de un material cerámico que convierte los rayos X en luz.

El detector tiene a su vez un fotodiodo, que convierte la luz en una señal eléctrica, proporcional al número de fotones de rayos X, que entran en la celda.

4) DAS (Data acquisition system).

El DAS muestrea la señal eléctrica y realiza la conversión analógica-digital, para que la computadora procese los datos.

B. Computadora

La computadora, tiene a su cargo el funcionamiento total del equipo, el almacenamiento de las imágenes reconstruidas y de los datos primarios, contiene el software de aplicación del tomógrafo y presenta una unidad de reconstrucción rápida (FRU), encargada de realizar los procesamientos necesarios para la reconstrucción de la imagen a partir de los datos recolectados por el sistema de detección.

C. Consola

La consola (ver Figura 1.7), es el módulo donde se encuentra el teclado para controlar la operación del equipo, el monitor de TV (donde el operador observa las imágenes) y, en algunos casos, la unidad de Display encargada de la conversión de la imagen digital almacenada en el disco duro de la computadora en una señal capaz de ser visualizada en el monitor de TV.



Figura 1.7: Consola.

Fuente: Corbo Pereira, D.N. *Tomografía Axial Computarizada*. XIII Seminario de Ingeniería biomédica 2004. Facultad de Medicina e Ingeniería. Universidad de la Republica Oriental de Uruguay.

1.3.4. Funcionamiento Básico

Básicamente, el tomógrafo está compuesto por un tubo de rayos X y un detector de radiaciones que mide la intensidad del rayo, luego que atraviesa el objeto en estudio. Conocida la intensidad emitida y la recibida, se puede

18 Terminología y preliminares

calcular la atenuación o porción de energía absorbida, que será proporcional a la densidad atravesada. Dividiendo el plano a estudiar en una serie de celdas de igual altura que el haz y el resto de las dimensiones elegidas de forma adecuada para completar el plano, la atenuación del haz será la suma de la atenuación de cada celda. Calculando la atenuación de cada celda se conocerá su densidad, permitiendo reconstruir un mapa del plano de estudio, asignando a cada densidad un nivel de gris. Las imágenes guardadas en disco, luego de procesadas, pueden mostrarse en pantalla [15].

CAPÍTULO 2

Las transformadas de Radon y wavelet

2.1. Introducción

Esta Sección contiene la definición de la transformada de Radon y algunas de sus propiedades. Se explica lo que es un sinograma en el contexto de tomografías. Se presentan algunos ejemplos de la transformada de Radon de una función $f(x, y)$ y se estudian conceptos básicos de la transformada wavelet.

2.2. La transformada de Radon en \mathbb{R}^n

La transformada de Radon $\mathcal{R}f$ [4, 5, 6, 7, 19, 22, 34, 38, 53, 57, 67], de una función $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ es definida por

$$\mathcal{R}f(t, \theta) = \mathcal{R}_\theta f(t) = \int_{\theta^\perp} f(t\theta + y) dy,$$

donde $\theta \in S^{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$

$\mathcal{R}f(t, \theta)$ representa la integral de f sobre un hiperplano en \mathbb{R}^n perpendicular a θ y a una distancia t dirigida desde el origen. Se tiene que $\mathcal{R}f(t, -\theta) = \mathcal{R}f(-t, \theta)$.

2.3. La transformada de Radon en \mathbb{R}^2

El conjunto de proyecciones desde todos los ángulos se denomina transformada de Radon o Sinograma.

Radon demostró que un objeto 2D o 3D se puede reconstruir a partir de un conjunto infinito de proyecciones tomadas desde diferentes ángulos. Inicialmente esta transformada se utilizó en astronomía y mucho después en la radiología para tomografía computarizada con rayos X.

En dos dimensiones, para cada $\theta \in S^1$, $\mathcal{R}_\theta f$ tiene soporte compacto contenido en $[-1, 1]$.

$$\mathcal{R}_\theta f : L^2(\Omega) \rightarrow L^2[-1, 1]$$

Si definimos $Z = (S^1 \times [-1, 1])$ entonces $\mathcal{R}_\theta f : L^2(\Omega) \rightarrow L^2[Z]$

$$f(x_1, x_2) \rightarrow \mathcal{R}_\theta f(t) = \int_{(\theta, t) \text{ linea}} f(x_1, x_2) ds.$$

La transformada de Radon de una función $f(x, y)$ definida sobre un dominio D de \mathbb{R}^2 simbolizada $\mathcal{R}f(t, \theta)$ o por $\mathcal{R}_\theta f(t)$, es definida como la integral de línea a lo largo de una línea inclinada con ángulo θ desde el eje x y a una distancia t del origen como se muestra en la Figura 2.1.

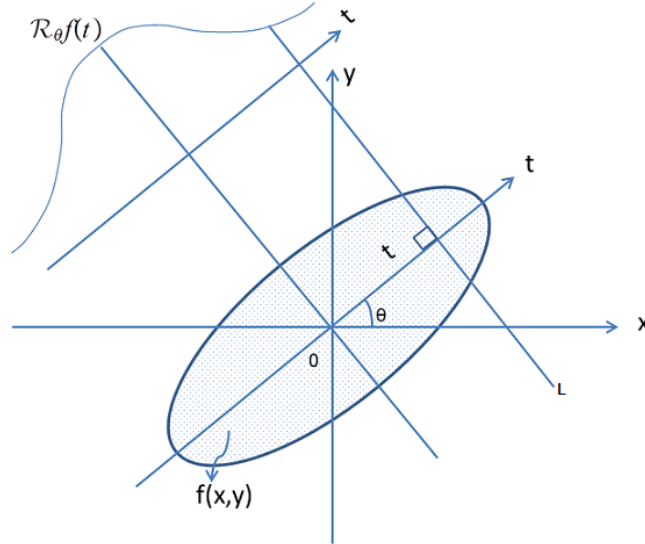


Figura 2.1: Transformada de Radon

Matemáticamente, esto se escribe como

$$\mathcal{R}f(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy, \quad (2.3.1)$$

donde δ [68, 80] es la distribución delta de Dirac, $-\infty < t < \infty, 0 \leq \theta < \pi$. Esta distribución indica el camino sobre la proyección. El símbolo \mathcal{R} , denota el operador de la transformada de Radon, se llama también operador de proyección. La función $\mathcal{R}f(t, \theta)$, la transformada de Radon de $f(x, y)$, es la proyección en una dimensión de $f(x, y)$ a un ángulo θ .

En términos de t y s , donde

$$\begin{aligned} x &= t \cos \theta - s \sin \theta & t &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y &= t \sin \theta + s \cos \theta & s &= y \cos \theta - x \sin \theta \end{aligned}$$

la ecuación (2.3.1) se puede expresar como

$$\mathcal{R}f(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds = \int_{(t, \theta) \text{ línea}} f(x, y) ds.$$

Una imagen puede ser representada por una función $f(x, y)$ donde las coordenadas (x, y) indican la posición de un punto en la imagen y en el caso de la tomografía de rayos X, el valor de f es el coeficiente de atenuación del rayo en el punto (x, y) . La suma de todas las atenuaciones del rayo en los diferentes puntos que atraviesa en la imagen se comprime en un único valor que corresponde con la transformada de Radon en el punto t_1 y en la dirección θ , por este motivo a $\mathcal{R}_\theta f(t_1)$ se le llama rayo suma. El conjunto de todos los rayos suma en una misma dirección se llama perfil o proyección general (ver Figura 2.2).

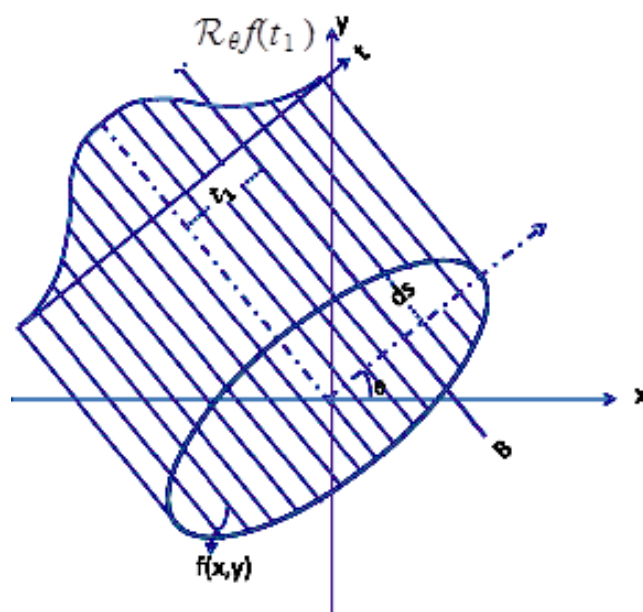


Figura 2.2: Perfil o proyección

Ejemplo 2.3.1. Hallar la transformada de Radon de la función

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$$

Solución

$$\mathcal{R}f(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f(t, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t \cos \theta - s \sin \theta)^2 - (t \sin \theta + s \cos \theta)^2} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 - s^2} ds = e^{-t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi} e^{-t^2}. \end{aligned}$$

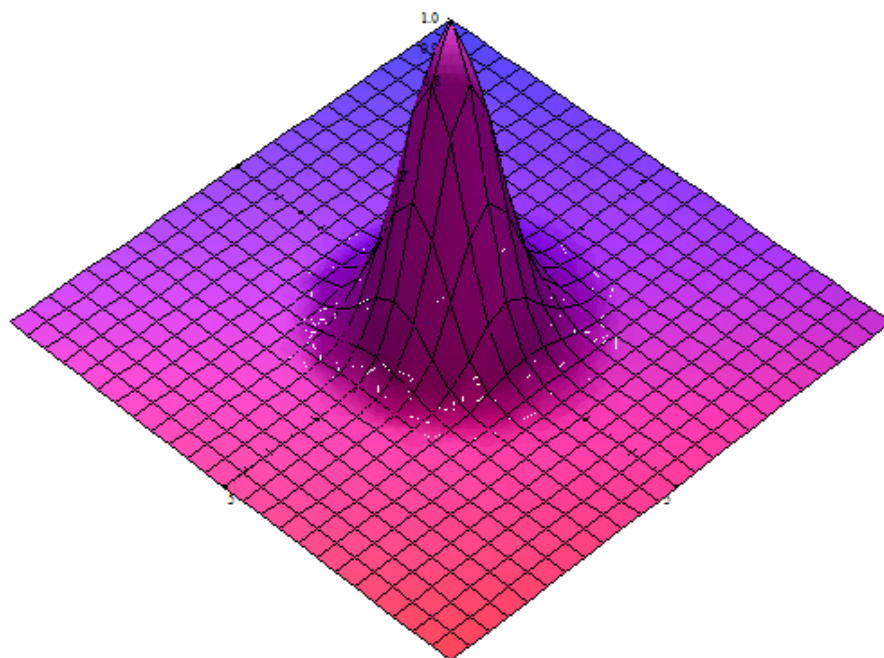


Figura 2.3: Gráfica de la función $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$

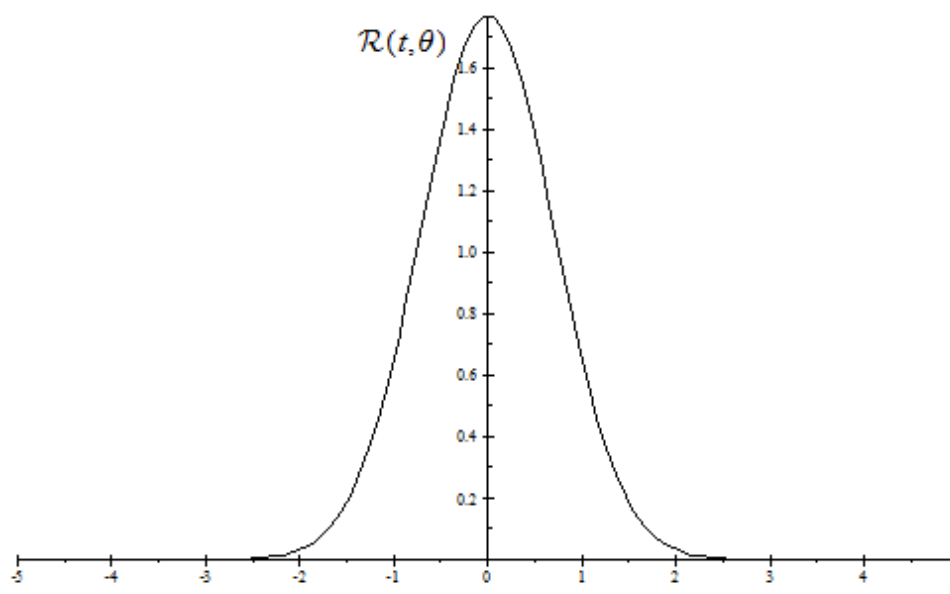


Figura 2.4: Gráfica de la función $\mathcal{R}f(t, \theta) = \sqrt{\pi}e^{-t^2}$

2.4. Propiedades de la transformada de Radon

La transformada de Radon tiene varias propiedades, algunas de ellas son linealidad, periodicidad, traslación y escalamiento [19].

2.4.1. Linealidad

La transformada de Radon es lineal

$$R[c_1 f(x, y) + c_2 g(x, y)] = c_1 Rf(x, y) + c_2 Rg(x, y).$$

En efecto

$$\begin{aligned} & R[c_1 f(x, y) + c_2 g(x, y)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [c_1 f(x, y) + c_2 g(x, y)] \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [c_1 f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) + c_2 g(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t)] dx dy \\ &= c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy \\ &+ c_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy \\ &= c_1 Rf(x, y) + c_2 Rg(x, y). \end{aligned}$$

2.4.2. Periodicidad

$$\mathcal{R}f(t, \theta) = \mathcal{R}f(t, \theta + 2k\pi).$$

En efecto

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f(t, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta[x \cos(\theta + 2k\pi) + y \sin(\theta + 2k\pi) - t] dx dy \\ &= \mathcal{R}f(t, \theta + 2k\pi) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2.4.3. Traslación

Una traslación de $f(x, y)$ resulta en un corrimiento de $\mathcal{R}f(t, \theta)$ una distancia igual a la proyección del vector de traslación sobre la línea $t = x \cos \theta + y \sin \theta$,

$$\mathcal{R}f(x - x_0, y - y_0) = \mathcal{R}f(t - x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta, \theta).$$

En efecto

$$\mathcal{R}f(x - x_0, y - y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0, y - y_0) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy,$$

si $z = x - x_0$ y $w = y - y_0$ entonces,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0, y - y_0) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z, w) \delta[(z + x_0) \cos \theta + (w + y_0) \sin \theta - t] dz dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z, w) \delta[z \cos \theta + w \cos \theta + (x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - t)] dz dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z, w) \delta[z \cos \theta + w \cos \theta - (t - x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta)] dz dw \\ &= \mathcal{R}f(t - x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta, \theta). \end{aligned}$$

2.4.4. Escalamiento

Un escalamiento de las coordenadas de $f(x, y)$ resulta en un escalamiento de la coordenada t ,

$$\mathcal{R}f(ax, ay) = \frac{1}{|a|} \mathcal{R}f(at, \theta); a \neq 0.$$

26 Las transformadas de Radon y wavelet

En efecto

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}f(ax, ay) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax, ay) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy \\
 &= \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w, z) \delta\left(\frac{w}{a} \cos \theta + \frac{z}{a} \sin \theta - t\right) dw dz \\
 &= \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w, z) \delta\left[\frac{1}{a}(w \cos \theta + z \sin \theta - at)\right] dw dz \\
 &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w, z) \delta[(w \cos \theta + z \sin \theta - at)] dw dz \\
 &= \frac{1}{|a|} \mathcal{R}f(at, \theta), a \neq 0.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.1. Determinar la transformada de Radon de la función definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda, & \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} \leq 1, \\ 0, & \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} > 1, \end{cases}$$

donde $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ es la elipse e centrada en el origen, con su eje mayor a lo largo del eje x y de longitud $2A$ y su eje menor de longitud $2B$ en el eje y . λ es un valor de atenuación dentro de la elipse y cero por fuera de la misma.

Solución La proyección o transformada de Radon de $f(x, y)$ es

$$\mathcal{R}f(t, \theta) = \int_{s_1}^{s_2} \lambda ds,$$

donde s_1 y s_2 son los puntos de intersección de la elipse con la línea de proyección t . Tomando las parametrizaciones de la recta

$$x = t \cos \theta - s \sin \theta \quad y = s \cos \theta + t \sin \theta$$

y sustituyendo en la elipse se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 &s^2 (A^2 \cos^2 \theta + B^2 \sin^2 \theta) - (2B^2 t \cos \theta \sin \theta - 2A^2 t \cos \theta \sin \theta) s \\
 &\quad + (A^2 t^2 \sin^2 \theta + B^2 t^2 \cos^2 \theta - A^2 B^2) = 0
 \end{aligned}$$

resolviendo la ecuación anterior para s y calculando $s_1 - s_2$ se obtiene

$$s_1 - s_2 = \frac{2AB}{A^2 \cos^2 \theta + B^2 \sin^2 \theta} \sqrt{A^2 \cos^2 \theta + B^2 \sin^2 \theta - t^2}$$

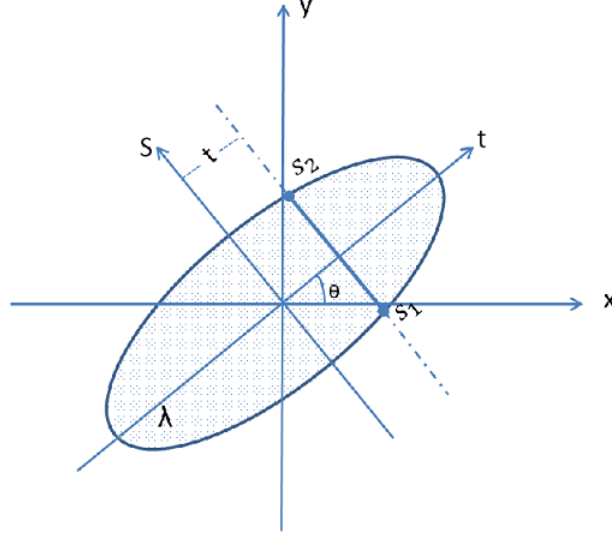


Figura 2.5: Transformada de Radon de una constante en una elipse

por lo tanto la proyección de la función $f(x, y)$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f(t, \theta) &= \int_{s_1}^{s_2} \lambda ds = \lambda(s_2 - s_1) \\ &= \lambda \left[\frac{2AB}{A^2 \cos^2 \theta + B^2 \sin^2 \theta} \sqrt{A^2 \cos^2 \theta + B^2 \sin^2 \theta - t^2} \right]. \end{aligned}$$

Sea $a^2(\theta) = A^2 \cos^2 \theta + B^2 \sin^2 \theta$ entonces $P_\theta^e(t) = \frac{2AB}{a^2(\theta)} \sqrt{a^2(\theta) - t^2}$. De esta manera, una proyección sobre una elipse se puede calcular exactamente para cualquier ángulo θ .

Rotamos la elipse alrededor del origen un ángulo α con respecto a su eje mayor y posteriormente se realiza una traslación del centro de la elipse a un punto (x_1, y_1) en el plano xy . Una proyección de esa elipse está dada por

$$\mathcal{R}f(t, \theta - \alpha) = \frac{2AB\lambda}{a^2(\theta - \alpha)} \sqrt{a^2(\theta - \alpha) - (t - d)^2},$$

donde $d = x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta$.

Las proyecciones de la elipse se presentan como una serie de líneas que toman valores desde $t = -1$ a $t = 1$. Cada una de las proyecciones corresponde a un ángulo de proyección particular. El ángulo varía desde $\theta = 0^\circ$ hasta $\theta = 180^\circ$.

2.5. Sinograma

En el contexto de las tomografías la transformada de Radon se suele llamar sinograma [31, 56], que es la representación gráfica de una matriz en la que el índice de las filas depende del ángulo θ que forma la línea de medida con el eje x y el índice de las columnas depende de la distancia t de la línea de medida al centro de coordenadas del sistema de detección.

Ejemplo 2.5.1. Graficar el sinograma de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda, & \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} \leq 1, \\ 0, & \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} > 1, \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned}\lambda &= 1, \\ A &= 0,69, \\ B &= 0,92 \\ Centro &= (0,0)\end{aligned}$$

el ángulo θ varía entre 1 y 181 grados, mientras que t varia de -0.92 a 0.92 con incrementos de 0.01.

Solución La siguiente matriz de 181x201 corresponde a los valores de las proyecciones donde las filas indican los grados y las columnas los valores de t , ver Figura 2.6.

$$\begin{bmatrix} 1,9936 & 1,9884 & 1,9832 & \dots & 0 \\ 1,9938 & 1,9886 & 1,9834 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1,9936 & 1,9884 & 1,9832 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

2.6. Transformada wavelet

2.6.1. Función $\Psi_{a,b}(t)$

Sea $\Psi \in L_2(\mathbb{R})$, la función dilatada y trasladada se define por

$$\Psi_{a,b}(t) := \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right), a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

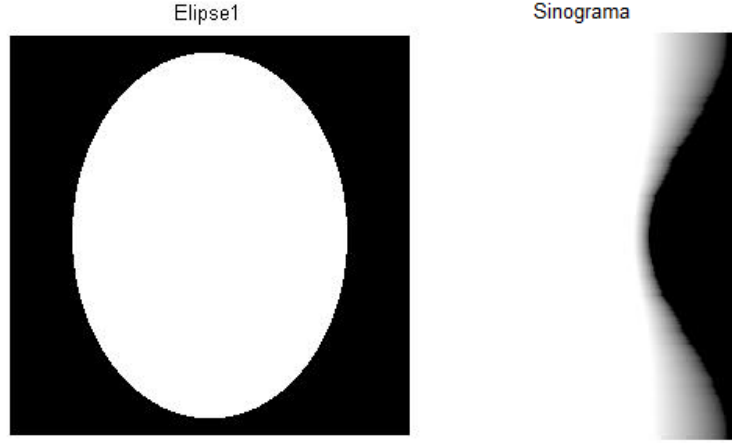


Figura 2.6: Sinograma

Esta función se obtiene a partir de Ψ , primero por dilatación en el factor a y, luego por traslación en b . Es claro que $\|\Psi\|_2 = \|\Psi_{a,b}\|_2$. Ψ se llama la wavelet madre.

2.6.2. Transformada wavelet continua

Cualquier función $f \in L_2(\mathbb{R})$ se puede escribir como

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \mathcal{W}_\Psi f(a,b) da db$$

en donde $\mathcal{W}_\Psi f$ es una transformada de f definida adecuadamente. También se tiene de modo alterno un desarrollo en serie

$$f(t) = \sum_{j,k} c_{j,k} 2^{j/2} \Psi(2^j t - k)$$

en donde se suma sobre las dilataciones en progresión geométrica. Para conservar la norma en $L_2(\mathbb{R})$ de la wavelet madre Ψ , se insertan los factores $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ y $2^{j/2}$, respectivamente.

2.6.3. Transformada Wavelet Discreta

La transformada wavelet continua introduce cierta redundancia, pues la señal original se puede reconstruir completamente calculando $W_\Psi f(a, \cdot)$ para una cantidad numerable de escalas, por ejemplo, potencias enteras de 2. Esto es, si se elige la escala $a = 2^{-j}$ para cada $j \in \mathbb{Z}$, y también se discretiza en el dominio del tiempo en los puntos $b = 2^{-j}k$, $k \in \mathbb{Z}$, la familia wavelets será dada ahora por

$$\begin{aligned}\Psi_{2^{-j}, 2^{-j}k}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2^{-j}}} \Psi\left(\frac{t - 2^{-j}k}{2^{-j}}\right) \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \Psi(2^j t - k), \forall_{j,k} \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Se utilizará la notación $\Psi_{j,k}$ para denotar la wavelet Ψ comprimida 2^j y trasladada el entero k , es decir,

$$\Psi_{jk}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \Psi(2^j t - k).$$

Con la elección de $a = 2^{-j}$ y $b = 2^{-j}k$, se observa que el muestreo en el tiempo se ajusta proporcionalmente a la escala, es decir, a mayor escala se toma puntos más distantes, ya que se busca información global, mientras que a menor escala se buscan detalles de la señal, por tal motivo se muestrea en puntos menos distantes entre sí. Para otras elecciones de a y b se puede consultar [14].

Definición 2.6.1. Una función $\Psi \in L_2(\mathbb{R})$ es una wavelet si la familia de funciones Ψ_{jk} definidas por

$$\Psi_{jk}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \Psi(2^j t - k), \forall_{j,k} \in \mathbb{Z}$$

es una base ortonormal en el espacio $L_2(\mathbb{R})$.

Una condición suficiente para la reconstrucción de una señal f es que la familia de dilatadas y trasladadas Ψ_{jk} forme una base ortonormal en el espacio $L_2(\mathbb{R})$, ver [10, 16] para más detalles. Esto si se tiene, cualquier función $f \in L_2(\mathbb{R})$ se puede escribir como

$$\begin{aligned}f(t) &= \sum_{j,k} d_{j,k} \Psi_{j,k}(t) \\ \text{ó} \\ f(t) &= \sum_{j,k} d_{j,k} 2^{\frac{j}{2}} \Psi(2^j t - k),\end{aligned}$$

donde $d_{j,k} = \langle f, \Psi_{2^{-j}, 2^{-j}k} \rangle = W_{\Psi} f(2^{-j}, 2^{-j}k)$.

Definición 2.6.2. Para cada $f \in L_2(\mathbb{R})$ el conjunto bidimensional de coeficientes

$$d_{j,k} = \langle f, \Psi_{j,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}} 2^{\frac{j}{2}} f(t) \overline{\Psi(2^j t - k)} dt$$

se llama la transformada wavelet discreta de f .

En consecuencia la expresión

$$f(t) = \sum_{j,k} d_{j,k} \Psi_{j,k}(t)$$

puede escribirse en forma alterna como

$$f(t) = \sum_{j,k} \langle f(t), \Psi_{j,k}(t) \rangle \Psi_{j,k}(t),$$

esta serie es la representación wavelet de f .

Ejemplo 2.6.1. El ejemplo clásico es la wavelet de Haar, la cual es dada por

$$\Psi(t) = \chi_{[0, \frac{1}{2}]} - \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}$$

Solución

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases}$$

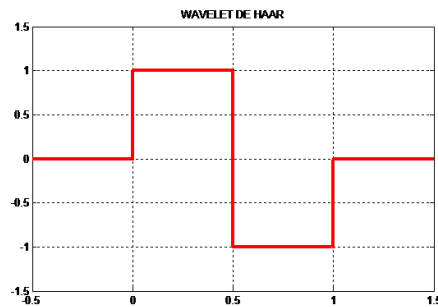


Figura 2.7: Wavelet de Haar

32 Las transformadas de Radon y wavelet

Observaciones:

1. $\Psi_{jk}(t)$ es más apropiada para representar detalles finos de la señal como oscilaciones rápidas. Los coeficientes wavelet $d_{j,k}$ miden la cantidad de fluctuación sobre el punto $t = 2^{\frac{1}{2}}$ con una frecuencia determinada por el índice de dilatación d .

2. Las wavelets gozan de la propiedad zoom, esto hace que las bases wavelets sean excelentes detectores de singularidades, en otras palabras, las singularidades producen coeficientes wavelets grandes.

3. La propiedad zoom es común en todos los sistemas wavelet, constituye la mayor diferencia con los sistemas Fourier para la detección de singularidades. En problemas de teoría de señales, las singularidades llevan información esencial como la presencia de esquinas en las imágenes. Esto hace de las bases wavelets una herramienta muy útil para el procesamiento de imágenes.

4. Es interesante notar que $d_{j,k} = W_{\Psi}f(2^{-j}, 2^{-j}k)$ es la transformada wavelet de f en el punto $(2^{-j}, 2^{-j}k)$. Estos coeficientes analizan la señal mediante la wavelet madre Ψ .

2.6.4. Análisis Multirresolución

En este trabajo pretendemos construir wavelets que tengan propiedades de aproximación y de localización. Una forma de hacerlo es a través del análisis multirresolución (AMR) [10, 16, 52, 54, 76].

Sea $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, la familia de trasladadas de φ ,

$$\{\varphi_{ok}, k \in \mathbb{Z}\} = \{\varphi_{ok}(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$$

es un sistema ortonormal (con el producto interno de $L_2(\mathbb{R})$). En lo que sigue

$$\begin{aligned}\varphi_{jk}(t) &= 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j t - k) \\ &= D_{2^j}T_k\varphi(t), j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

donde $D_a f(t) = a^{\frac{1}{2}}f(at)$ y $T_a f(t) = f(t - a)$ son los operadores de dilatación y traslación, respectivamente.

Se definen los espacios vectoriales

$$\begin{aligned} V_0 &= \left\{ f(t) = \sum_k c_k \varphi(t-k) : \sum_k |c_k|^2 < \infty \right\}, \\ V_1 &= \left\{ h(t) = f(2t) : f \in V_0 \right\}, \\ &\vdots \\ V_j &= \left\{ h(t) = f(2^j t) : f \in V_0 \right\}, j \in \mathbb{Z} \\ &= \text{gen} \{ \varphi_{jk}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) : k \in \mathbb{Z} \}. \end{aligned}$$

Nótese que φ genera la sucesión de espacios $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$. Suponga que la función φ se escoge de tal forma que los espacios estén encajados $V_j \subset V_{j+1}, j \in \mathbb{Z}$, y $\bigcup_{j \geq 0} V_j$ es denso en $L_2(\mathbb{R})$, estos dos hechos fundamentales hacen parte del análisis multirresolución.

Definición 2.6.3. *Un análisis multirresolución en $L_2(\mathbb{R})$ es una sucesión creciente de subespacios cerrados V_j en $L_2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}, \dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$ tales que:*

1. $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ es denso en $L_2(\mathbb{R})$, es decir, $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L_2(\mathbb{R})$,
2. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$,
3. $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}, j \in \mathbb{Z}$,
4. $f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t-k) \in V_0, j \in \mathbb{Z}$,
5. Existe una función $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ tal que el conjunto de funciones $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortogonal(normal) para V_0 .

La función φ se llama función de escala. En el espacio V_{j+1} las funciones se describen con más detalles que en el espacio V_j , la resolución es mejor en el espacio más grande. Esto es, las funciones en V_{j+1} que no están en V_j realzan la resolución. Es usual reunir estos sintonizadores finos en un nuevo subespacio $W_j = V_{j+1} \setminus V_j$. Sin embargo, la elección de estos subespacios no

34 Las transformadas de Radon y wavelet

es única, pero se puede escoger a W_j como el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} . Es decir,

$$W_j = V_{j+1} \cap V_j^\perp, j \in \mathbb{Z},$$

o de manera equivalente

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, j \in \mathbb{Z}.$$

Informalmente, esto quiere decir que si se tiene una función f a resolución 2^{j+1} y se proyecta a resolución inferior 2^j entonces

$$f = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \Psi_{jk} \rangle \Psi_{jk},$$

P_j representa la proyección ortogonal en el espacio V_j donde se recoge la versión suavizada de f y la diferencia $f - P_j f$ representa el detalle de f , que está en W_j y se expresa como

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \Psi_{jk} \rangle \Psi_{jk}.$$

Recuerde que

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \Psi_{jk} \rangle \Psi_{jk}, j \in \mathbb{Z}.$$

En otras palabras, W_j contiene los detalles en V_{j+1} que no se representan en V_j , y cada función (señal) en W_j es ortogonal a toda función en V_j (ver p.e., [4]).

2.6.5. Base Dual

Por simplicidad se considera un espacio de coordenadas bidimensional cualquiera de dos vectores (e_1, e_2) que no son paralelos pueden formar una base para el espacio. Si el ángulo entre los vectores es de 90° , se tiene una base ortonormal. Cualquier vector \vec{A} en este espacio puede ser escrito únicamente como una superposición de dos bases de vectores $\vec{A} = A_1 e_1 + A_2 e_2$. Si la base es ortogonal, se tiene que $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ y la componente A_i a lo largo de e_i está dada por el producto interno $e_i \cdot \vec{A} = A_1 e_i \cdot e_1 + A_2 e_i \cdot e_2 = A_i$. Sin embargo, si la base no es ortogonal, el A dado no es más largo que el dado por el producto interno de \vec{A} y

e_i . En orden al calcular la componente A_i se introduce otro conjunto de vectores base $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ llamado el dual de (e_1, e_2) . La base dual satisface que $\tilde{e}_i \cdot e = \delta_{ij}$ y el espacio generado por la base dual se llama espacio dual del espacio original. En términos de la base dual, las componentes de un vector a lo largo de la base (e_1, e_2) puede ser calculado como

$$\tilde{e}_i \cdot \vec{A} = \sum_j A_j \tilde{e}_i e_j = A_i,$$

así vemos que la introducción de la base dual y el espacio dual nos habilita para descomponer un vector como una combinación lineal o superposición de bases no-ortogonales. Similarmente para una base no ortogonal $\{\phi_i(t)\}$ de un espacio de función, se introduce la base dual

$$\{\tilde{\phi}_i(t)\} \text{ por } \langle \tilde{\phi}_i, \phi_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\tilde{\phi}_i(t)} \phi_j(t) dt = \delta_{ij}.$$

Una función $f(t)$ puede ser descompuesta como una superposición de la base no ortogonal $\{\phi_i(t)\}$

$$f(t) = \sum_i f_i \phi_i(t) = \sum_j \langle \tilde{\phi}_j, f \rangle \phi_j(t).$$

Se supone que el espacio de la función y su dual son el mismo, una condición satisfactoria por L^2 ; sinembargo, las reglas de la base dual y la base original puede ser interacambiada y se obtiene

$$f(t) = \sum_i \langle \phi_i, f \rangle \tilde{\phi}_i(t)$$

cuando $\{\phi_i(t)\}$ es ortogonal, $\tilde{\phi} = \phi$.

2.6.6. Funciones Separables

Una función escala separable es: $\phi(x, y) = \phi(x) \phi(y)$ donde $\phi(x)$ y $\phi(y)$ son funciones de escala unidimensionales.

Como en el caso unidimensional, se generan las wavelets $\Psi(x)$ y $\Psi(y)$ a partir de $\phi(x)$ y $\phi(y)$ entonces se definen las tres wavelets bidimensionales [10, 16, 76] siguientes:

$$\begin{aligned} \Psi^1(x, y) &= \Psi(x) \phi(y) \text{ es la dirección horizontal (filas),} \\ \Psi^2(x, y) &= \phi(x) \Psi(y) \text{ es la dirección vertical (columnas) y} \\ \Psi^3(x, y) &= \Psi(x) \Psi(y) \text{ es la dirección diagonal.} \end{aligned}$$

2.7. Momentos de desvanecimiento

Este concepto es muy importante, ya que relaciona la suavidad de una wavelet con el número de momentos de desvanecimiento que tenga [10, 16, 76]. El i -ésimo momento de la wavelet se calcula con la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^i \Psi(x) dx = 0.$$

Por lo anterior, se tiene que una wavelet tiene v momentos de desvanecimiento si la integral es cero para $i = 0, 1, 2, 3, \dots, v-1$. El orden de una transformada wavelet es dado por el número de momentos de desvanecimiento. Cuando el valor promedio de una wavelet es cero, se tiene un momento de desvanecimiento, y los polinomios de grado menor a v serán eliminados. Si la transformada $\hat{\Psi}(w)$ decrece rápidamente a cero en torno de $w = 0$, se verifica

la propiedad de oscilaciones

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \Psi(t) dt = 0 \text{ para } k = 0, 1, \dots, k.$$

2.8. Las wavelets Daubechies

Ingrid Daubechies descubrió la jerarquía de las wavelets que llevan su nombre. El elemento más simple de la jerarquía es la wavelet de Haar que es la única discontinua.

Las otras wavelets en la jerarquía tienen soporte compacto y son continuas. A medida que aumentan el grado empiezan a incrementar la suavidad, esto es, ellas pueden tener un número prescrito de derivadas continuas. La suavidad de estas wavelets se puede escoger para satisfacer condiciones en aplicaciones pertinentes como en nuestro caso de la tomografía local.

Características de las wavelets Daubechies:

- Tienen soporte compacto.
- Tienen un alto número de momentos de desvanecimientos.
- Manejan ortogonalidad.
- Manejan biortogonalidad.
- Manejan simetría.

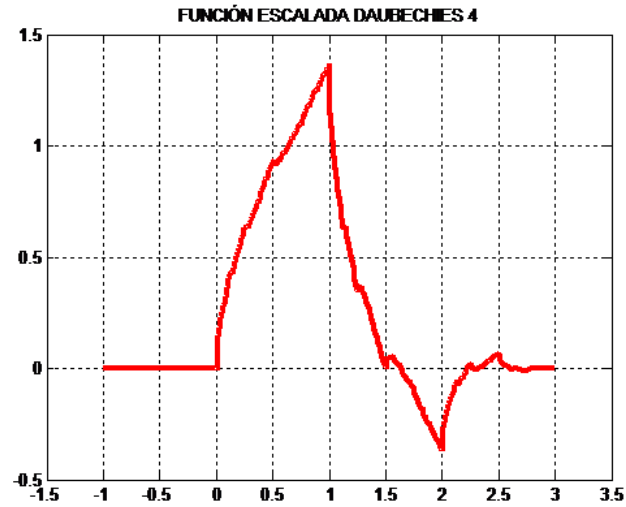


Figura 2.8: Función escalada wavelet Daubechies 4

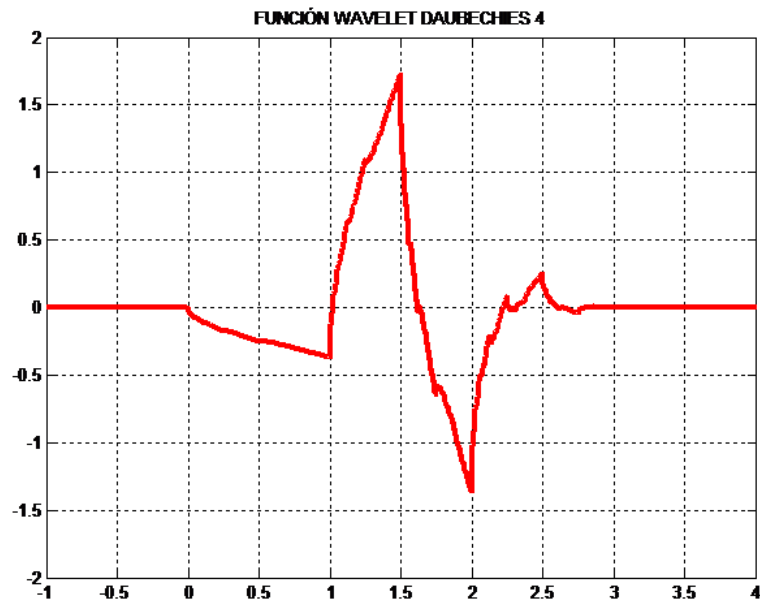


Figura 2.9: Función wavelet Daubechies 4

2.8.1. Construcción de las wavelets de Daubechies

La función escalada wavelet Daubechies se puede construir con la fórmula de recursión

$$\phi_n(x) = \sum_k P_k \phi_{n-1}(2x - k) \text{ para } n \geq 1,$$

la función $\phi_0(x)$ es la función escalada de Haar.

A continuación ilustraremos como se construye la función escalada wavelet Daubechies 4, las otras funciones escaladas wavelets Daubechies siguen un esquema similar

Ejemplo 2.8.1. La función escalada wavelet Daubechies 4 en el espacio V_0 es

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Solución En el espacio V_1 , la función escalada wavelet Daubechies 4 es

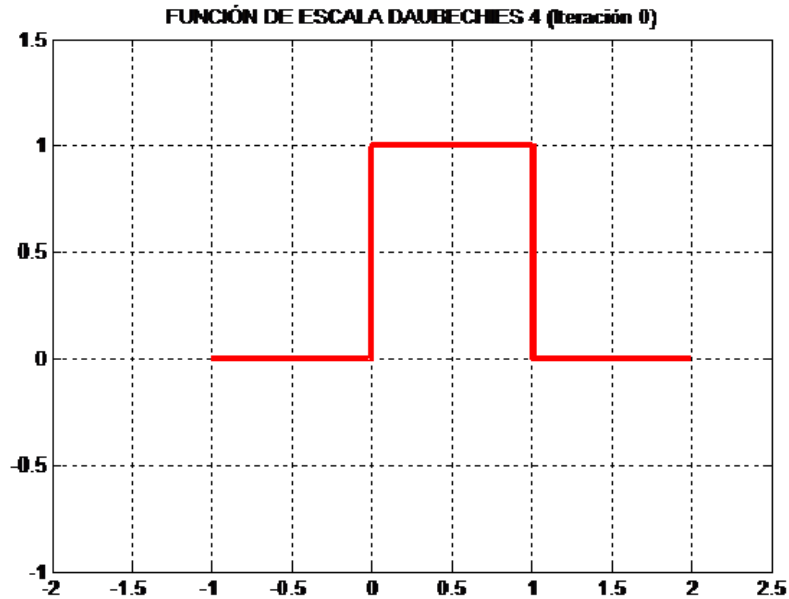


Figura 2.10: Función de escala wavelet Daubechies 4 (Iteración 0)

$$\phi_1(x) = P_0\phi_0(2x) + P_1\phi_0(2x-1) + P_2\phi_0(2x-2) + P_3\phi_0(2x-3)$$

donde

$$P_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}, P_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}, P_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}, P_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$$

calculando $\phi_1(x)$ para $x = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$ se obtiene la siguiente expresión

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ P_0, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ P_1, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ P_2, & \text{si } 1 \leq x < \frac{3}{2}, \\ P_3, & \text{si } \frac{3}{2} \leq x < 2, \\ 0, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

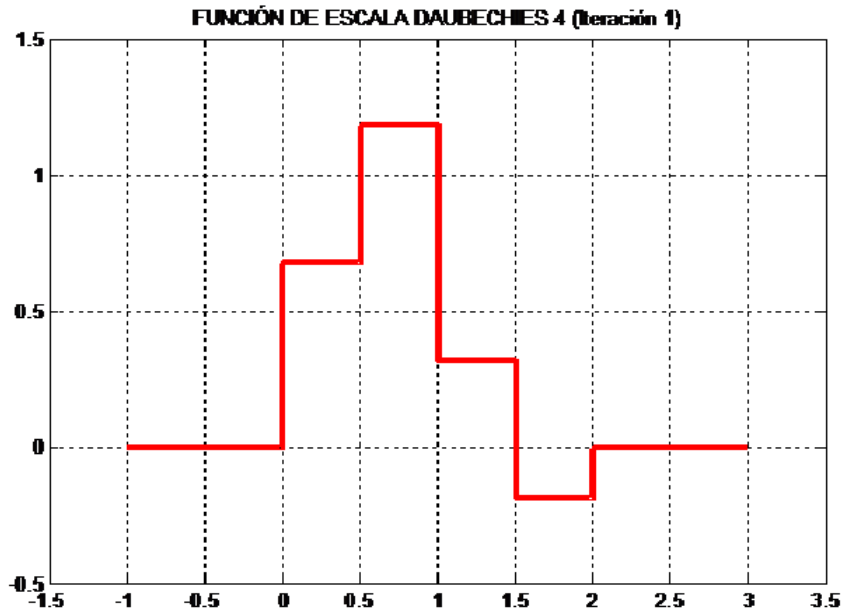


Figura 2.11: Función de escala wavelet Daubechies 4 (Iteración 1)

Para el Espacio V_2 , la función de escala wavelet Daubechies 4 es

$$\phi_2(x) = P_0\phi_1(2x) + P_1\phi_1(2x-1) + P_2\phi_1(2x-2) + P_3\phi_1(2x-3)$$

Al descomponer $\phi_2(x)$ hasta el nivel cero se obtiene la expresión

$$\phi_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ P_0^2, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ P_0P_1, & \text{si } \frac{1}{4} \leq x < \frac{2}{4}, \\ P_0P_2 + P_0P_1, & \text{si } \frac{2}{4} \leq x < \frac{3}{4}, \\ P_0P_3 + P_1^2, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x < \frac{4}{4}, \\ P_1P_2 + P_0P_2, & \text{si } \frac{4}{4} \leq x < \frac{5}{4}, \\ P_1P_3 + P_1P_2, & \text{si } \frac{5}{4} \leq x < \frac{6}{4}, \\ P_2^2 + P_0P_3, & \text{si } \frac{6}{4} \leq x < \frac{7}{4}, \\ P_2P_3 + P_1P_3, & \text{si } \frac{7}{4} \leq x < \frac{8}{4}, \\ P_2P_3, & \text{si } \frac{8}{4} \leq x < \frac{9}{4}, \\ P_3^2, & \text{si } \frac{9}{4} \leq x < \frac{10}{4}, \\ 0, & \text{si } x \geq \frac{10}{4}. \end{cases}$$

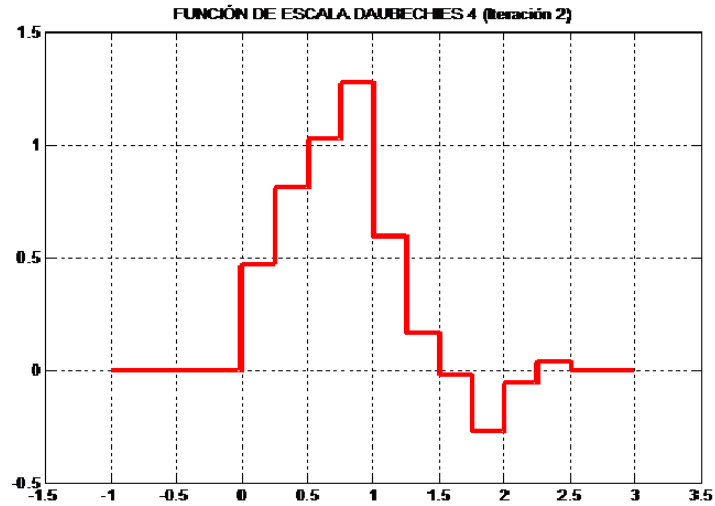


Figura 2.12: Función de escala wavelet Daubechies 4 (Iteración 2)

Para descomponer la función de escala wavelet Daubechies 4 en los espacios V_3, V_4, V_5 y V_6 se sigue el mismo procedimiento.

$$\begin{aligned}\phi_3(x) &= P_0\phi_2(2x) + P_1\phi_2(2x-1) + P_2\phi_2(2x-2) + P_3\phi_2(2x-3), \\ \phi_4(x) &= P_0\phi_3(2x) + P_1\phi_3(2x-1) + P_2\phi_3(2x-2) + P_3\phi_3(2x-3), \\ \phi_5(x) &= P_0\phi_4(2x) + P_1\phi_4(2x-1) + P_2\phi_4(2x-2) + P_3\phi_4(2x-3), \\ \phi_6(x) &= P_0\phi_5(2x) + P_1\phi_5(2x-1) + P_2\phi_5(2x-2) + P_3\phi_5(2x-3).\end{aligned}$$

Las gráficas de la función de escala wavelet Daubechies 4 en los espacios V_3, V_4, V_5 y V_6 aparecen a continuación

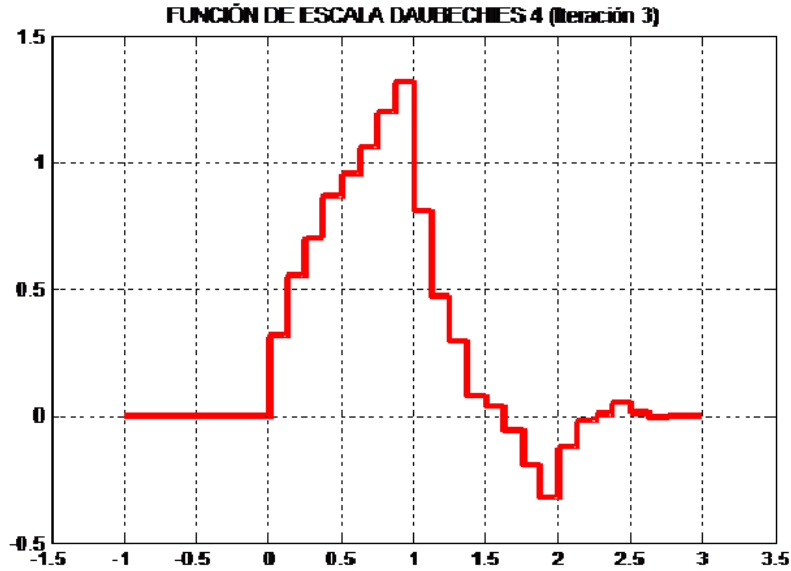


Figura 2.13: Función de escala wavelet Daubechies 4 (Iteración 3)

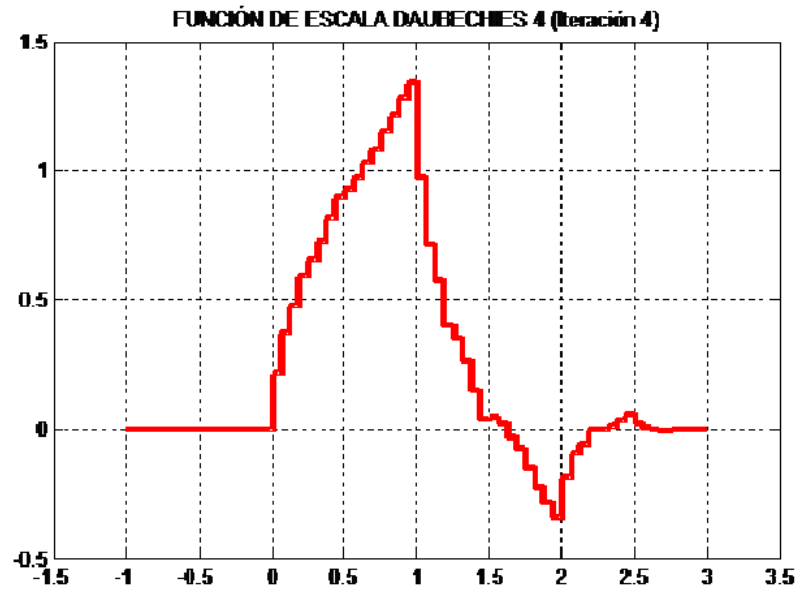


Figura 2.14: Función de escala wavelet Daubechies 4 (Iteración 4)

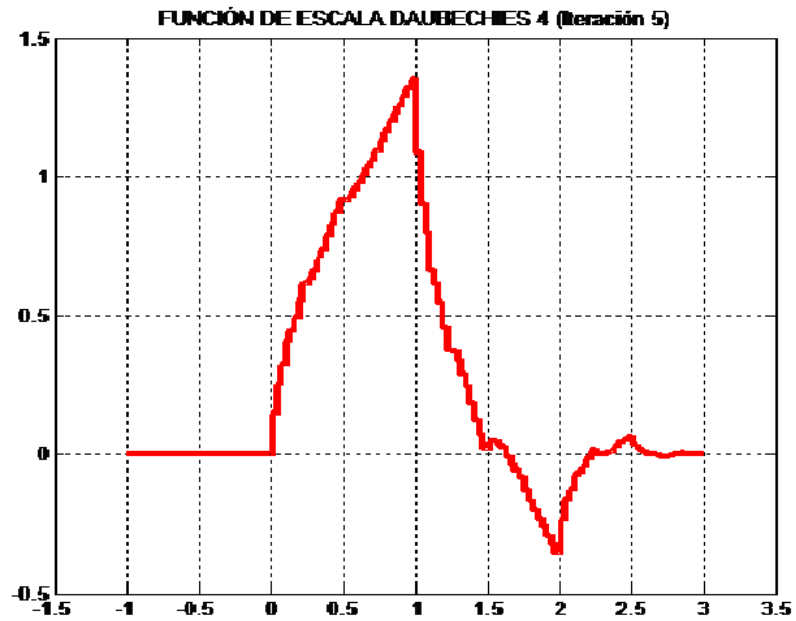


Figura 2.15: Función de escala wavelet Daubechies 4 (Iteración 5)

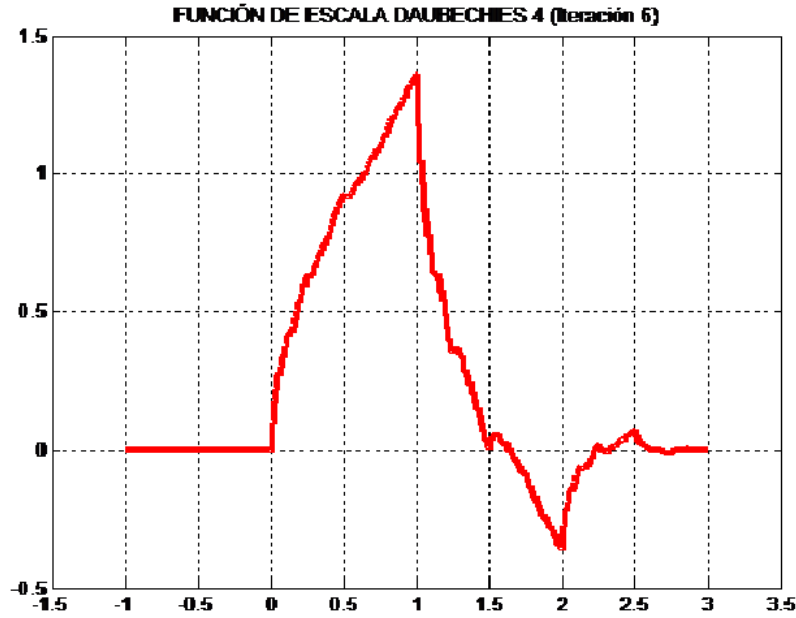


Figura 2.16: Función de escala wavelet Daubechies 4 (Iteración 6)

La función de detalles o wavelet Daubechies esta dada por:

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1-N}^N (-1)^k P_{1-k} \phi_{n-1}(2x - k), \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

tiene soporte compacto de -1 a 2.

En el caso de la wavelet Daubechies 4, para el espacio V_0 se tiene que:

$$\psi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 0, & \text{otro lugar.} \end{cases}$$

Para el espacio V_1 se tiene:

$$\psi_1(x) = -P_0\phi_0(2x - 1) + P_1\phi_0(2x) - P_2\phi_0(2x + 1) + P_3\phi_0(2x + 2)$$

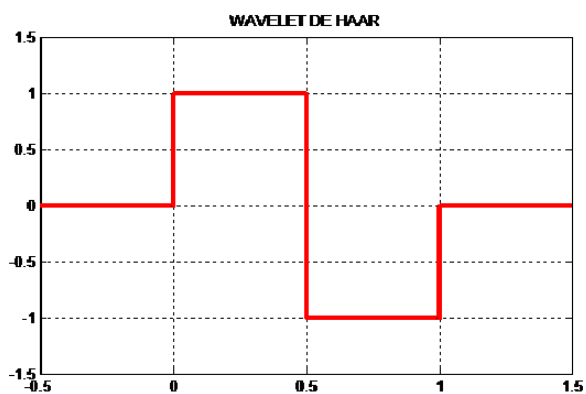


Figura 2.17: Wavelet de Haar

$$\psi_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1, \\ P_3, & \text{si } -1 \leq x < -\frac{1}{2}, \\ -P_2, & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x < 0, \\ P_1, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -P_0, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 0, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

cuya gráfica es:

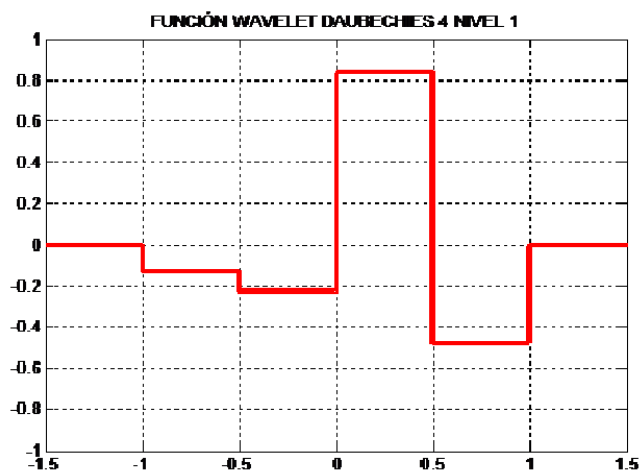


Figura 2.18: Función wavelet Daubechies 4 (Nivel 1)

CAPÍTULO 3

El problema de la tomografía local

3.1. Introducción

En esta sección veremos como la transformada de Radon está estrechamente relacionada con la transformada de Fourier en una y dos dimensiones. La transformada de Radon contiene toda la información necesaria para la reconstrucción de la imagen. La fórmula básica de la inversión de la transformada de Radon viene relacionada con el teorema de cortes de Fourier [19, 34, 53, 57]; los operadores de retroproyección y de retroproyección filtrada juegan un papel muy importante en el algoritmo diseñado en este trabajo que se completa con las wavelets Daubechies y su correspondiente análisis multirresolución.

3.2. El teorema de cortes de Fourier en \mathbb{R}^n

Dado $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\theta \in S^{n-1}$ fijo, $\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\gamma) = \hat{f}(\gamma\theta)$ para todo $\gamma \in \mathbb{R}$.

En \mathbb{R}^2 para la imagen $f(x, y)$, la transformada unidimensional de Fourier de una proyección paralela a la misma tomada a un ángulo θ nos da un corte de la transformada bidimensional $F(u, v)$ subtendiendo el mismo ángulo θ con el eje u . Es decir, podemos establecer una relación entre la transformada

unidimensional de Fourier de una proyección y la transformada bidimensional de Fourier del objeto. En la Figura 3.1 se puede apreciar esta relación.

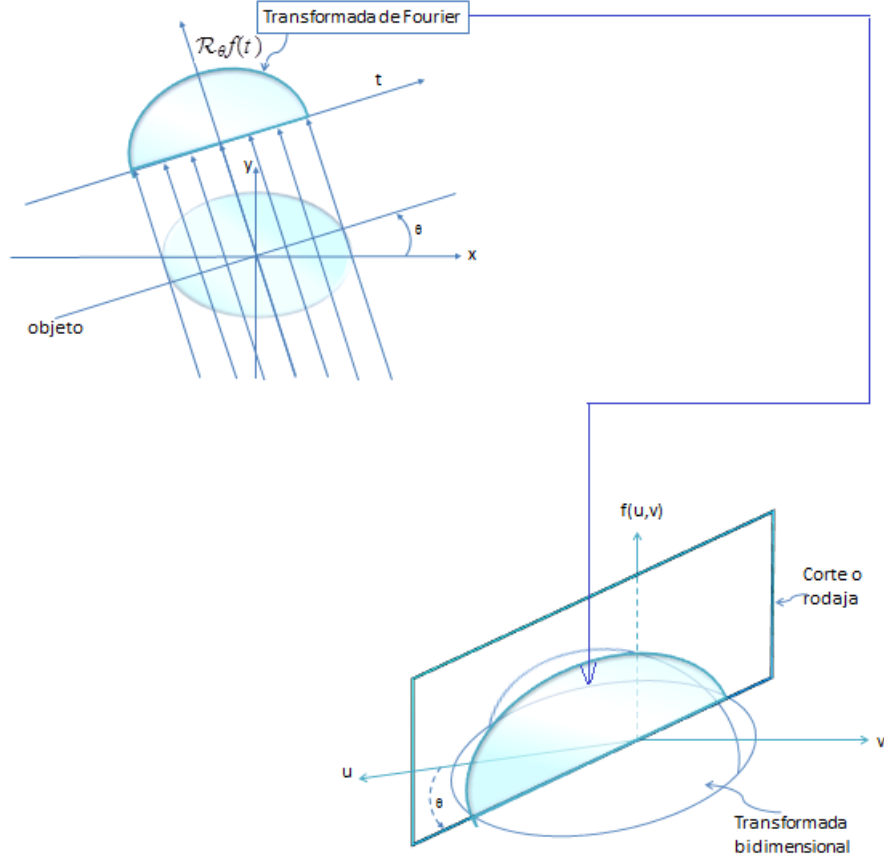


Figura 3.1: Corte o rebanada de Fourier

La proyección se definió como:

$$\mathcal{R}_\theta f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, s \cos \theta + t \sin \theta) ds.$$

La transformada unidimensional de Fourier de $\mathcal{R}_\theta f(t)$ es

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\gamma) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_\theta f(t) e^{-2\pi i \gamma t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, s \cos \theta + t \sin \theta) e^{-2\pi i \gamma t} ds dt. \end{aligned}$$

Sean $x = t \cos \theta - s \sin \theta$ $y = s \cos \theta + t \sin \theta$ con jacobiano igual a 1, es decir, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)} = 1$ por lo tanto,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\gamma) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i \gamma t (x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (\gamma \theta)} dx dy = \hat{f}(\gamma \theta).\end{aligned}$$

En la Figura 3.2 se observa la representación esquemática de las proyecciones. Los puntos representan el objeto en el dominio de frecuencias espaciales. Los puntos cercanos al origen, en el plano γ, θ están relativamente juntos, pero conforme nos alejamos del centro, hacia las altas frecuencias, los puntos muestreados aparecen muy apartados.

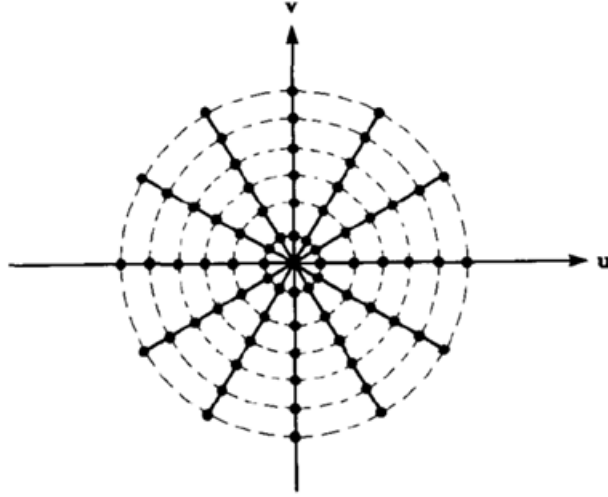


Figura 3.2: Dominio de frecuencias

Ejemplo 3.2.1. Comprobar el teorema de cortes de Fourier $\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(w) = F(u, v)$ para la función

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}.$$

Solución Debemos probar que

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - y^2} e^{-2\pi i (ux + vy)} dx dy = \pi e^{-\pi^2 (u^2 + v^2)}.$$

Ahora calculamos $\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(w)$

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_\theta f(t) e^{-2\pi i w t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\pi} e^{-t^2} e^{-2\pi i w t} dt \\
 &= \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 - 2\pi i w t - i^2 \pi^2 w^2 + i^2 \pi^2 w^2} dt \\
 &= \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+i\pi w)^2} e^{-\pi^2 w^2} dt \\
 &= \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 w^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+i\pi w)^2} dt \\
 &= \pi e^{-\pi^2 w^2} \quad \text{llamando} \quad w = \sqrt{u^2 + v^2} \\
 &= \pi e^{-\pi^2 (u^2 + v^2)} \\
 &= F(u, v).
 \end{aligned}$$

3.3. Operador de retroproyección

Dada una función $h(t, \theta)$ que representa la transformada de Radon de una función f , definida sobre el espacio $S^{n-1} \times \mathbb{R}$, entonces el operador de retroproyección denotado por $R^\#$ [6, 7, 19, 83] esta dado por

$$R^\# h(x) = \int_{S^{n-1}} h(x \cdot \theta, \theta) d\theta.$$

El par (t, θ) es la parametrización del hiperplano en $\mathbb{R}^n \{x : x \cdot \theta = t\}$, y la función h está definida sobre $(n-1)$ -dimensiones en hiperplanos en \mathbb{R}^n . En este caso $R^\# h(x)$ es la integral de h sobre todos los hiperplanos que pasan a través de x .

Una proyección en una dirección θ es la suma de las atenuaciones en los pixeles atravesados por una rayo X, al aplicar el operador de retroproyección, la atenuación se distribuye de manera uniforme en cada uno de estos pixeles, sin tener en cuenta que en la proyección la atenuación puede ser diferente en cada uno de ellos, esto hace que la imagen recuperada sea borrosa. Por lo anterior, el operador de retroproyección no es exactamente la transformada inversa de Radon sino una aproximación.

3.4. Fórmula de retroproyección filtrada

El operador de retroproyección por si solo permite recuperar una imagen borrosa de un objeto original, para mejorar la nitidez se aplica un filtro a la retroproyección, por lo cual esta técnica se conoce como retroproyección filtrada [6, 8, 19, 34, 36, 83].

Dada $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $g(t, \theta) = g_\theta(t)$, $\theta \in S^{n-1}, t \in \mathbb{R}$

$$f * R^\# g_\theta(\mathbf{x}) = R^\# (R_\theta f * g_\theta)(\mathbf{x})$$

donde la convolución sobre la izquierda es con respecto a $x \in \mathbb{R}^n$ y sobre la derecha es con respecto a $t \in \mathbb{R}$ [6].

3.5. Fórmula de inversión de Fourier \mathbb{R}^n

La fórmula de inversión de Fourier en coordenadas polares es

$$f(x) = \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\gamma) e^{2i\pi(x \cdot \theta)r} |r|^{n-1} dr d\theta$$

donde S_+^{n-1} denota la esfera superior en \mathbb{R}^n [5].

3.6. El Operador potencial de Riesz

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, el operador potencial de Riesz I^α [5, 7, 13, 38, 53, 60, 73, 81], se define en términos de la transformada de Fourier por

$$\widehat{I^\alpha f}(\xi) = |\xi|^{-\alpha} \widehat{f}(\xi)$$

si $\alpha < n$, entonces $f = \frac{1}{2} I^{-\alpha} \mathcal{R}^\# (I^{\alpha+1-n} \mathcal{R}_\theta f)$.

Para el caso $n = 2$ tenemos que $f(x, y) = \frac{1}{2} I^{-\alpha} \mathcal{R}^\# (I^{\alpha-1} R_\theta f)$ en efecto, por definición

$$\widehat{I^\alpha f}(u, v) = \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right)^{-\alpha} \widehat{f}(u, v)$$

tomando transformada inversa de Fourier se tiene

$$I^\alpha f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(ux+vy)} \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right)^{-\alpha} \widehat{f}(u, v) du dv$$

50 El problema de la tomografía local

sean $u = r \cos \theta, v = r \sin \theta$ con $J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} = r$

$$\begin{aligned} I^\alpha f(x, y) &= \int_0^\pi \int_0^\infty e^{2\pi i r(x \cos \theta + y \sin \theta)} r^{1-\alpha} \hat{f}(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^\infty e^{2\pi i r(x \cos \theta + y \sin \theta)} r^{1-\alpha} \widehat{R_\theta f}(r) dr d\theta \end{aligned}$$

reemplazando θ por $-\theta$ y r por $-r$ y usando el hecho que \widehat{Rf} sobre $(0, \infty)$ es igual a \widehat{Rf} sobre $(-\infty, 0)$ entonces sumando ambas fórmulas se obtiene

$$\begin{aligned} I^\alpha f(x, y) &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty r^{1-\alpha} \widehat{R_\theta f}(r) e^{2\pi i r(x \cos \theta + y \sin \theta)} dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \widehat{I^{1-\alpha} R_\theta f}(r) d\theta = \frac{1}{2} \mathbb{R}^\# \left[\widehat{I^{\alpha-1} R_\theta f}(r) \right] \end{aligned}$$

aplicando $I^{-\alpha}$ a ambos lados se tiene $f(x, y) = \frac{1}{2} I^{-\alpha} \mathbb{R}^\# [I^{\alpha-1} R_\theta f]$.

Nótese que $I^{-2} = -(2\pi)^{-2} \Delta$, donde Δ es el operador de Laplace, y

$$\begin{aligned} \Delta f &= -4\pi^2 I^{-2} f \\ &= -2\pi^2 I^{-\alpha-2} \mathbb{R}^\# (I^{\alpha+1-n} \mathcal{R}_\theta f). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.6.1. Comprobar que $I^{-2} f(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \Delta f(x, y)$ para la función

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$$

Solución Vamos a calcular $I^{-2} f(x, y)$

$$\begin{aligned} I^{-2} f(x, y) &= F^{-1} \left\{ \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right)^2 \pi e^{-\frac{\pi}{2}(u^2+v^2)} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (u^2 + v^2) \pi e^{-\pi(u^2+v^2)} e^{2\pi i(ux+vy)} du dv \\ &= \pi \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (u^2 + v^2) e^{-\pi u^2 + 2\pi i u x} e^{-\pi v^2 + 2\pi i v y} du dv \\ &= \pi \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (u^2 + v^2) e^{-(\pi^2 u^2 - 2\pi i u x + i^2 x^2) + i^2 x^2} e^{-(\pi^2 v^2 - 2\pi i v y + i^2 y^2) + i^2 y^2} du dv \\ &= \pi e^{-x^2-y^2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (u^2 + v^2) e^{-(\pi u - ix)^2} e^{-(\pi v - iy)^2} du dv \\ &= \frac{1}{2\pi^2} (1 - 2x^2) e^{-x^2-y^2} + \frac{1}{2\pi^2} (1 - 2y^2) e^{-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

Pero por otro lado

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{4\pi^2}\Delta f(x, y) &= -\frac{1}{4\pi^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] \\
 &= -\frac{1}{4\pi^2}\left[-2e^{-x^2-y^2}(1-2x^2) - 2e^{-x^2-y^2}(1-2y^2)\right] \\
 &= \frac{1}{2\pi^2}(1-2x^2)e^{-x^2-y^2} + \frac{1}{2\pi^2}(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}.
 \end{aligned}$$

3.7. El problema de la tomografía local

El problema de la tomografía local [7, 20, 22, 25, 27, 29, 49, 53, 56] en \mathbb{R}^n se puede establecer de la siguiente manera:

La transformada interna de Radon es la restricción de la transformada de Radon y está dada por

$$\mathcal{R}_\theta f(t) \rightarrow \mathcal{R}_\theta f(t) \chi_{[-\alpha, \alpha]}(t) \text{ donde } |\alpha| < 1.$$

En lugar de conocer $\mathcal{R}_\theta f(t)$ en $[-1, 1]$ sólo se conoce $\mathcal{R}_\theta f(t)$ en el intervalo $[-\alpha, \alpha]$. En \mathbb{R}^2 esto se puede interpretar como la restricción de la transformada de Radon a las líneas que pasan por un círculo de radio α en torno al origen.

El problema de la tomografía local es recuperar la función

$$f(x) \chi_{\{|x| \leq \alpha\}}(x)$$

desde

$$\mathcal{R}_\theta f(t) \chi_{[-\alpha, \alpha]}(t).$$

La transformada de Radon presenta el problema de no localización en dimensiones pares. A continuación mostramos porque esto no es posible.

Sean las funciones $f(x), x \in \mathbb{R}^n$, y $g(\theta, t)$ con $\theta \in S^{n-1}$ y $t \in \mathbb{R}$. Aplicando el operador de retroproyección filtrada

$$f * R^\# g_\theta(x) = R^\# (R_\theta f * g_\theta)(x)$$

tomando

$$G(x) = R^\# g_\theta(x) \tag{3.7.1}$$

$$f * G(x) = R^\# (R_\theta f * g_\theta)(x)$$

52 El problema de la tomografía local

por el operador potencial de Riesz con $\alpha = 0$

$$G(x) = R^\# \left(\frac{1}{2} I^{1-n} R_\theta G \right) (x) \quad (3.7.2)$$

de las ecuaciones (3.7.1) y (3.7.2) se obtiene

$$\mathbf{g}_\theta(x) = \frac{1}{2} I^{1-n} R_\theta G$$

aplicando la transformada de Fourier

$$\hat{\mathbf{g}}_\theta(\gamma) = \frac{1}{2} \widehat{I^{1-n} R_\theta G}(\gamma)$$

de la definición del operador potencial de Riesz

$$\hat{\mathbf{g}}_\theta(\gamma) = \frac{1}{2} |\gamma|^{n-1} \widehat{R_\theta G}(\gamma)$$

y usando el teorema de cortes de Fourier

$$\hat{\mathbf{g}}_\theta(\gamma) = \frac{1}{2} |\gamma|^{n-1} \hat{G}(\theta\gamma).$$

Como el propósito es que la transformada de Radon sea invertible localmente desde medidas locales, será suficiente que ambas funciones \mathbf{g}_θ y G tengan soporte compacto.

Si este fuera el caso entonces se podría escoger $\alpha' > \alpha$ tal que

$$Sop(G) \subseteq \{x : |x| \leq \alpha' - \alpha\}$$

y

$$Sop(g_\theta) \subseteq [-\alpha' + \alpha, \alpha' - \alpha]$$

para cada $\theta \in S^{n-1}$.

Esto permite recobrar exactamente $f * G(x)$, para $|x| \leq \alpha$ y desde $R_\theta f(s)$ con $s \in [-\alpha', \alpha']$. Suponiendo que $\int_{R^2} G(x) dx = 1$ y dilatando G se puede recuperar a f con la precisión deseada en $\{x : |x| \leq \alpha\}$, ahora definimos

$$G_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} G\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \quad f * G_\epsilon \rightarrow f, \epsilon \rightarrow 0.$$

Esto tendría sentido pero ambas funciones \mathbf{g}_θ y G no pueden ser de soporte compacto, ya que si se supone que G es de soporte compacto entonces $\hat{\mathbf{g}}_\theta$ y sus $(n-1)$ derivadas deben ser suaves en $\gamma = 0$. Pero esto no es cierto, ya que si n es par $|\gamma|^{n-1}$ tiene una discontinuidad en las $(n-1)$ derivadas en $\gamma = 0$. De esta manera \mathbf{g}_θ no tendría soporte compacto y la inversión local no es posible.

3.8. Porqué usar wavelets

3.8.1. Atacando el problema

La imposición de discontinuidades en el origen en el dominio de la frecuencia no se producirá si se cuenta con funciones para las cuales su transformada de Fourier es cero en el origen y si tienen muchos momentos de desvanecimiento. De esta manera, si $G(x)$ tiene soporte compacto y si $\hat{G}(\gamma\theta)$ tiene m momentos de desvanecimiento en $\gamma = 0$, entonces $\hat{g}_\theta(\gamma)$ tendrá $n + m - 1$ derivadas continuas en $\gamma = 0$ como lo garantiza el lema 3.8.1.

Suponiendo un buen decaimiento sobre $\hat{G}(\gamma\theta)$ y sus derivadas, nos gustaría que $g_\theta(t)$ decayera para t^{-n-m+1} en $\pm\infty$. Lo anterior nos sugiere que, si G tiene un gran número de momentos de desvanecimiento, podemos recuperar localmente a $f * G(x)$ en dimensiones pares.

Lema 3.8.1. *Suponga que si n es par, la función $h(t)$ es de soporte compacto y $\int_{-\infty}^{\infty} t^j h(t) dt = 0$, para $j = 0, 1, \dots, m$ para algún $m \geq 0$. Entonces la función $|\gamma|^{n-1} \hat{h}(\gamma)$ tiene $n + m - 1$ derivadas continuas sobre \mathbb{R} .*

Como se analizó la transformada de Radon inversa es no localizada en dimensiones pares porque el operador potencial de Riesz I^{1-n} no preserva el soporte compacto. Sin embargo, I^{1-n} tiene un decaimiento rápido si f tiene momentos de desvanecimiento [70, 76]. Dado que todas las wavelets tienen por lo menos un momento de desvanecimiento, esto indica que la transformada wavelet de f puede ser recuperada localmente desde proyecciones locales.

El grado de localización depende de la rapidez con que decae el operador potencial de Riesz de la wavelet. En particular el teorema 3.8.1 nos indica el decaimiento de $I^{1-n}\Psi$ para grandes valores de t y muestra que la energía es muy pequeña desde el origen.

Teorema 3.8.1. *Suponga que n es par, y la función $h(t)$ satisface lo siguiente*

a) $h(t)$ tiene soporte compacto,

b) $\int_{-\infty}^{\infty} t^j h(t) dt = 0$, para $j = 0, 1, \dots, m$ para algún $m > 0$,

54 El problema de la tomografía local

$$c) \int_{-\infty}^{\infty} \left| \gamma^j \hat{h}^{(k)}(\gamma) \right| d\gamma < \infty \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots, m \text{ y } k = 0, 1, \dots, n+m-1,$$

$$d) \int_{-\infty}^{\infty} \left| \gamma^j \hat{h}^{(k)}(\gamma) \right|^2 d\gamma < \infty \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots, m \text{ y } k = 0, 1, \dots, n+m-1.$$

Entonces $I^{1-n}h(t) = o(|t|^{-n-m+1})$, $|t| \rightarrow \infty$ y $t^{n+m-1}I^{1-n}h(t) \in L^2(\mathbb{R})$.

Demostración. Por hipótesis del teorema en los incisos a) y b) y el lema(3.8.1) se puede afirmar que

$$\left(\widehat{I^{1-n}h} \right)(\gamma) = |\gamma|^{n-1} \hat{h}(\gamma),$$

tiene $n+m-1$ derivadas continuas.

Ahora por la hipótesis inciso c)

$$\frac{d^k}{d\gamma^k} \left(|\gamma|^{n-1} \hat{h}(\gamma) \right) \in L^1(\mathbb{R}),$$

para $k = 0, 1, \dots, n+m-1$, por lo que su transformada inversa de Fourier $(2\pi it)^{n+m-1} I^{1-n}h(t)$ es acotada y continua en \mathbb{R} , y se anula en $\pm\infty$, por lo tanto se puede inferir que

$$I^{1-n}h(t) = o(|t|^{-n-m+1}) \text{ para } |t| \rightarrow \infty.$$

Por la hipótesis inciso d) se tiene que

$$\frac{d^k}{d\gamma^k} \left(|\gamma|^{n-1} \hat{h}(\gamma) \right) \in L^2(\mathbb{R}),$$

para $k = 0, 1, \dots, n+m-1$, por lo que su transformada inversa de Fourier $(2\pi it)^{n+m-1} I^{1-n}h(t)$, está en el espacio $L^2(\mathbb{R})$ por lo tanto $t^{n+m-1}I^{1-n}h(t) \in L^2(\mathbb{R})$. \square

3.9. Algoritmo de reconstrucción local

Ahora se presentan las bases matemáticas para implementar un algoritmo de reconstrucción local tomando directamente los valores puntuales de una función f y usando los coeficientes wavelet de $R_\theta f$ para cada ángulo θ .

3.9.1. Fórmula de reconstrucción

La reconstrucción directa de los valores de una función f es posible a partir de los coeficientes wavelets de $R_\theta f$ para cada θ ; la reconstrucción se obtiene del siguiente teorema

Teorema 3.9.1. *Sea $\Psi(t)$ una wavelet en una dimensión tal que*

$$\{\Psi_{j,k}\} = \left\{ 2^{-\frac{j}{2}} \Psi(2^{-j}x - k) \right\}$$

es una base Riesz o un marco para L^2 .

Sea $\rho(t)$ una función definida por $\hat{\rho}(t) = \frac{1}{2} |\gamma| \hat{\Psi}(\gamma)$. Suponga que para cada $\theta \in [0, 2\pi)$

$$R_\theta f(\theta, s) = \sum_{j,k} c_{j,k}(\theta) \Psi_{j,k}(s)$$

para algún coeficiente $c_{j,k}(\theta)$, entonces $\rho(t)$ es una función admisible y

$$f(x) = \sum_{j,k} 2^{-j} \int_0^{2\pi} c_{j,k}(\theta) \rho(x \cdot \theta) d\theta.$$

Demostración. Suponga que la función $f(x)$ es suave y tiene decaimiento, además la transformada de Radon de f se puede expresar como la combinación lineal de algunos coeficientes $c_{j,k}(\theta)$ con las wavelets $\Psi_{j,k}(s)$. Es decir,

$$R_\theta f(\theta, s) = \sum_{j,k} c_{j,k}(\theta) \Psi_{j,k}(s) \quad (3.9.1)$$

ahora bien aplicando la fórmula de la transformada inversa de Radon

$$f(x) = \frac{1}{2} I^{-\alpha} R^\# (I^{\alpha+1-n} R_\theta f) \quad (3.9.2)$$

para $n = 2$ y $\alpha = 0$, se obtiene

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} I^{-1} R_\theta f(x \cdot \theta) d\theta \quad (3.9.3)$$

al sustituir (3.9.1) en (3.9.3)

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} I^{-1} \sum_{j,k} c_{j,k}(\theta) \Psi_{j,k}(x \cdot \theta) d\theta$$

56 El problema de la tomografía local

ahora intercambiando la sumatoria y la integral obtenemos

$$f(x) = \sum_{j,k} \int_0^{2\pi} c_{j,k}(\theta) \frac{1}{2} I^{-1} \Psi_{j,k}(x \cdot \theta) d\theta$$

finalmente note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\widehat{I^{-1} \Psi_{j,k}})(\gamma) &= \frac{1}{2} |\gamma| \widehat{\Psi_{j,k}}(\gamma) \\ &= \frac{1}{2} |\gamma| e^{-2\pi i \gamma (2^j k)} 2^{\frac{j}{2}} \widehat{\Psi}(2^j \gamma) \\ &= \frac{1}{2} 2^{-j} e^{-2\pi i \gamma (2^j k)} 2^{\frac{j}{2}} |2^j \gamma| \widehat{\Psi}(2^j \gamma) \\ &= 2^{-j} e^{-2\pi i \gamma (2^j k)} 2^{\frac{j}{2}} \widehat{\rho}(2^j \gamma) \\ &= 2^{-j} \widehat{\rho}_{j,k}(2^j \gamma). \end{aligned}$$

□

Aquí para $j < 0$, y para x y θ fijos, $c_{j,k}$ puede ser calculado con precisión desde $R_\theta f(\theta, s)$ para s en un pequeño intervalo alrededor de $x \cdot \theta$, es decir, desde las proyecciones de f sobre líneas a través de un pequeño disco centrado en x .

Usando

$$f(x) = \sum_{j,k} 2^{-j} \int_0^{2\pi} c_{j,k}(\theta) \rho_{j,k}(x \cdot \theta) d\theta.$$

La reconstrucción de las características de escalas finas de f en x (donde fina escala se refiere a coeficientes con $j < 0$), es posible usando proyecciones locales.

Para reconstruir características en grandes escalas de f cerca a x , en [10], se observó que para $j \geq 0$ y todo k , $c_{j,k}(\theta)$ es esencialmente de banda limitada en todo ángulo θ , por lo que se puede estimar con precisión usando un conjunto de escasas muestras. De esta manera las características de f cerca de x se pueden recuperar desde un conjunto de escasas muestras de medidas globales y por lo tanto la recuperación local alcanzada tiene una significativa reducción a la exposición. Para más detalles ver [10, 11]. Todo esto indica porque las wavelets han sido efectivas en los algoritmos de tomografía local.

Si Ψ es de soporte compacto y tiene suficientes momentos de desvanecimiento, entonces ρ tendrá el mismo soporte que Ψ , esto es, ρ tendrá un decaimiento muy rápido fuera del soporte de Ψ .

La invarianza de las traslaciones de las bases wavelets estándar se puede mejorar teniendo un par de bases wavelets cuya wavelet madre se relaciona a través de la transformada de Hilbert. Las razones fundamentales por las que la transformada de Hilbert [19, 53, 56] se puede, sin problema integrar en el marco multirresolución de wavelets son su escala y las traslaciones invariantes y la preservación natural de la energía.

En las Figuras 3.3, 3.4 y 3.5 se ilustran funciones $\rho(t)$ que corresponden a diferentes $\Psi(t)$. En ellas se observa que los soportes de las funciones $\rho(t)$ no son más largos que los soportes de las respectivas $\Psi(t)$.

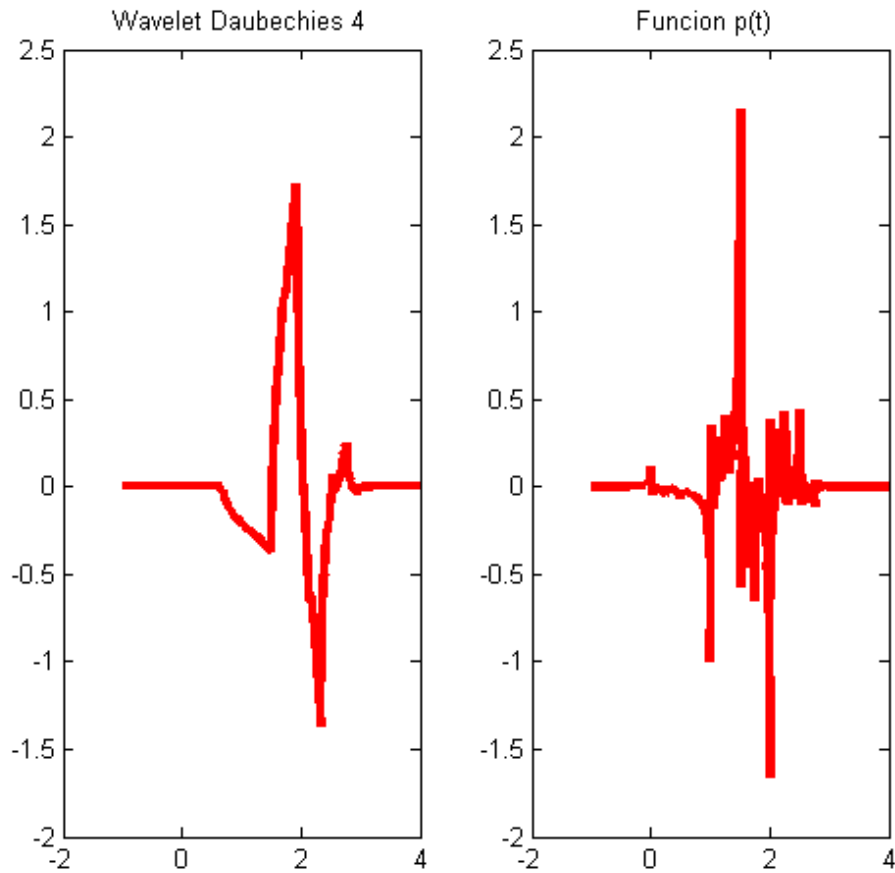


Figura 3.3: Wavelet Daubechies 4 y su correspondiente Función $\rho(t)$

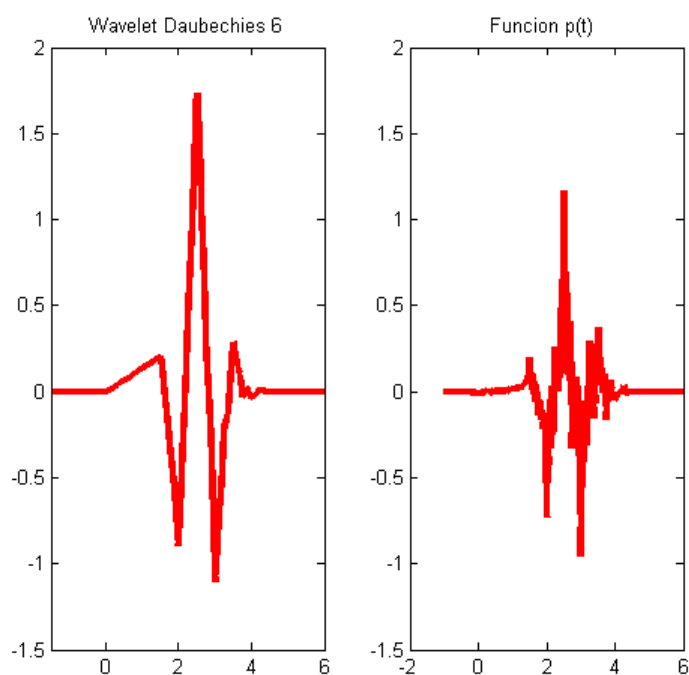


Figura 3.4: Wavelet Daubechies 6 y su correspondiente Función $\rho(t)$

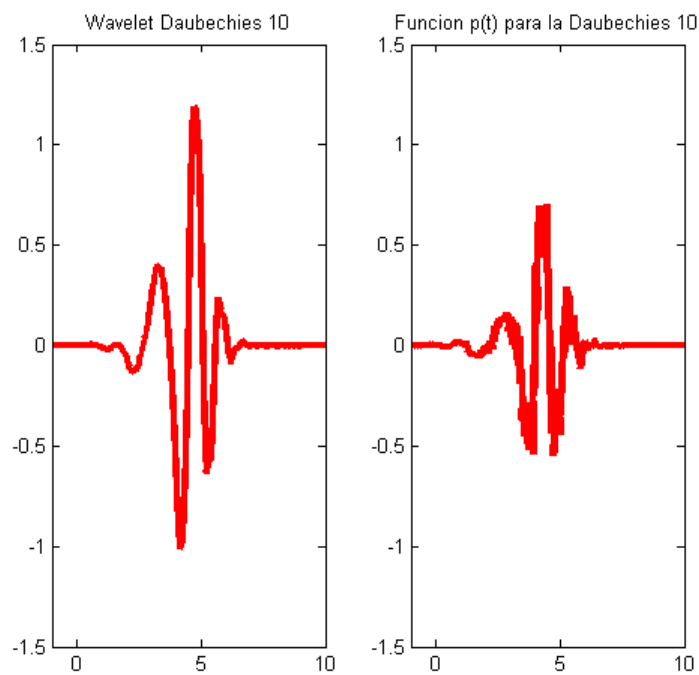


Figura 3.5: Wavelet Daubechies 10 y su correspondiente Función $\rho(t)$

3.9.2. Bases wavelets separables

Suponga que $\varphi, \tilde{\varphi}, \Psi$ y $\tilde{\Psi}$ son las funciones de escala, escala dual, wavelet y wavelet dual para una base wavelet generadas para un análisis multirresolución.

La construcción estándar para una correspondiente base wavelet separable [7, 16, 54] en dos dimensiones viene dada por el teorema 3.9.2 y las funciones duales.

Teorema 3.9.2. *Sea φ una función de escala y Ψ la correspondiente wavelet generada por una base wavelet ortonormal de $L^2(R)$. Se definen tres wavelets:*

$$\begin{aligned}\Psi^1(x) &= \varphi(x_1) \Psi(x_2), \\ \Psi^2(x) &= \Psi(x_1) \varphi(x_2), \\ \Psi^3(x) &= \Psi(x_1) \Psi(x_2),\end{aligned}$$

y se denota $1 \leq m \leq 3$, $k = (k_1, k_2)$, $x = (x_1, x_2)$ y $K = (j, k)$

$$\Psi_K^m(x) = \Psi_{j,k}^m(x) = 2^j \Psi^m(2^j x_1 - k_1, 2^j x_2 - k_2).$$

La familia wavelet

$$\{\Psi_K^1, \Psi_K^2, \Psi_K^3\}_{(K \in \mathbb{Z}^3)}$$

es una base ortonormal de $L^2(R^2)$.

Funciones duales,

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(x) &= \tilde{\varphi}(x_1) \tilde{\varphi}(x_2), \\ \widetilde{\Psi^1}(x) &= \tilde{\varphi}(x_1) \tilde{\Psi}(x_2), \\ \widetilde{\Psi^2}(x) &= \tilde{\Psi}(x_1) \tilde{\varphi}(x_2), \\ \widetilde{\Psi^3}(x) &= \tilde{\Psi}(x_1) \tilde{\Psi}(x_2).\end{aligned}$$

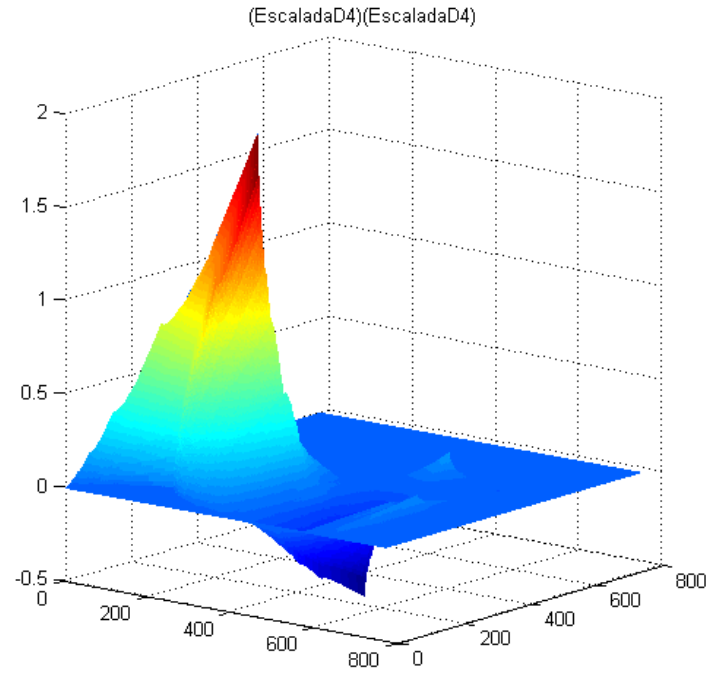


Figura 3.6: $\Phi(x) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)$

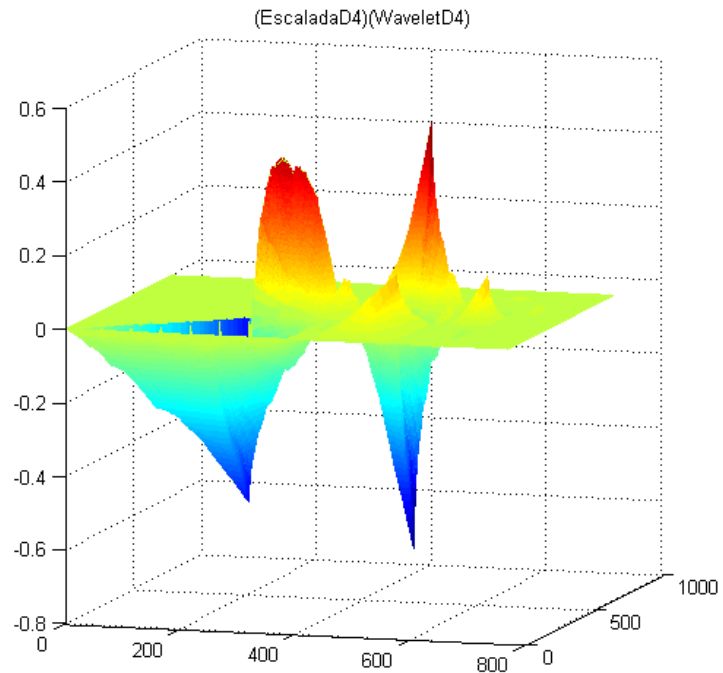


Figura 3.7: $\Psi^1(x) = \varphi(x_1)\Psi(x_2)$

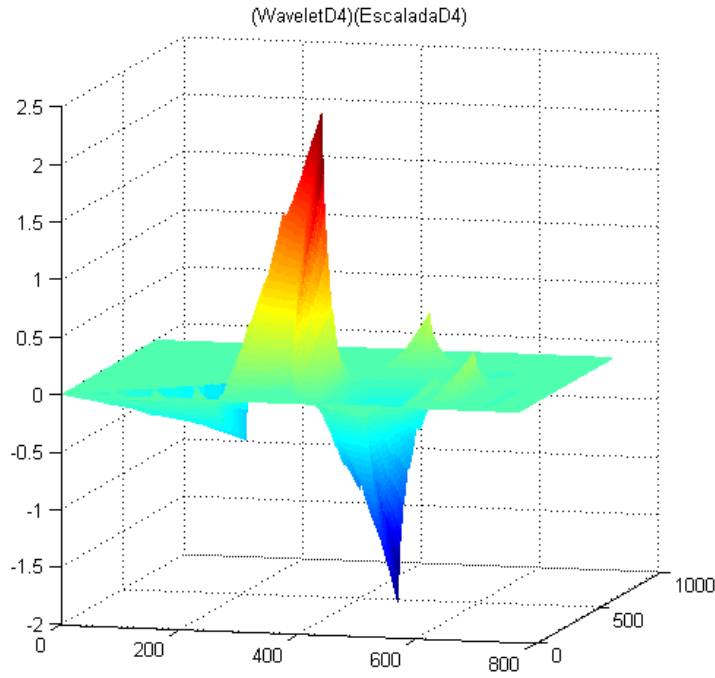


Figura 3.8: $\Psi^2(x) = \Psi(x_1)\varphi(x_2)$

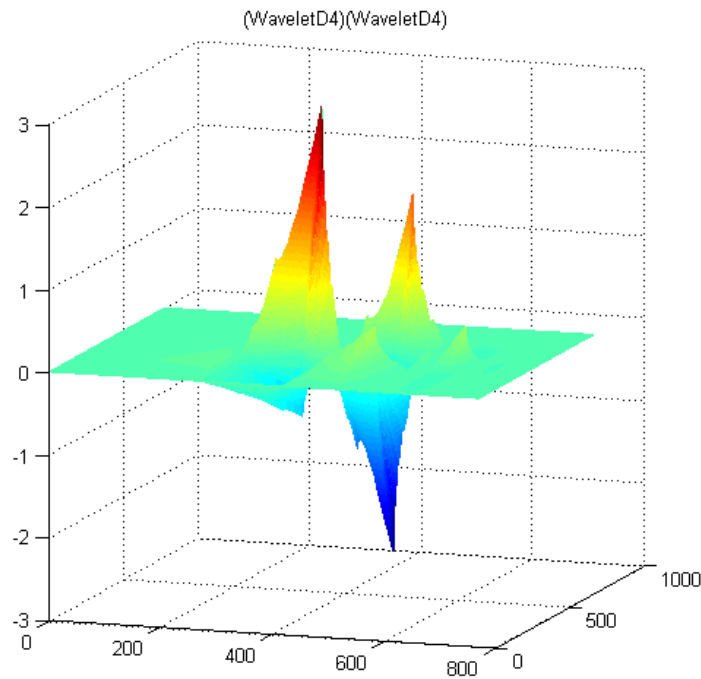


Figura 3.9: $\Psi^3(x) = \Psi(x_1)\Psi(x_2)$

En las Figuras 3.10 al 3.14 se ilustra la descomposición del fantasma de shepp-Logan modificado desde el nivel 1 hasta el nivel 5 usando una wavelet Daubechies 4.

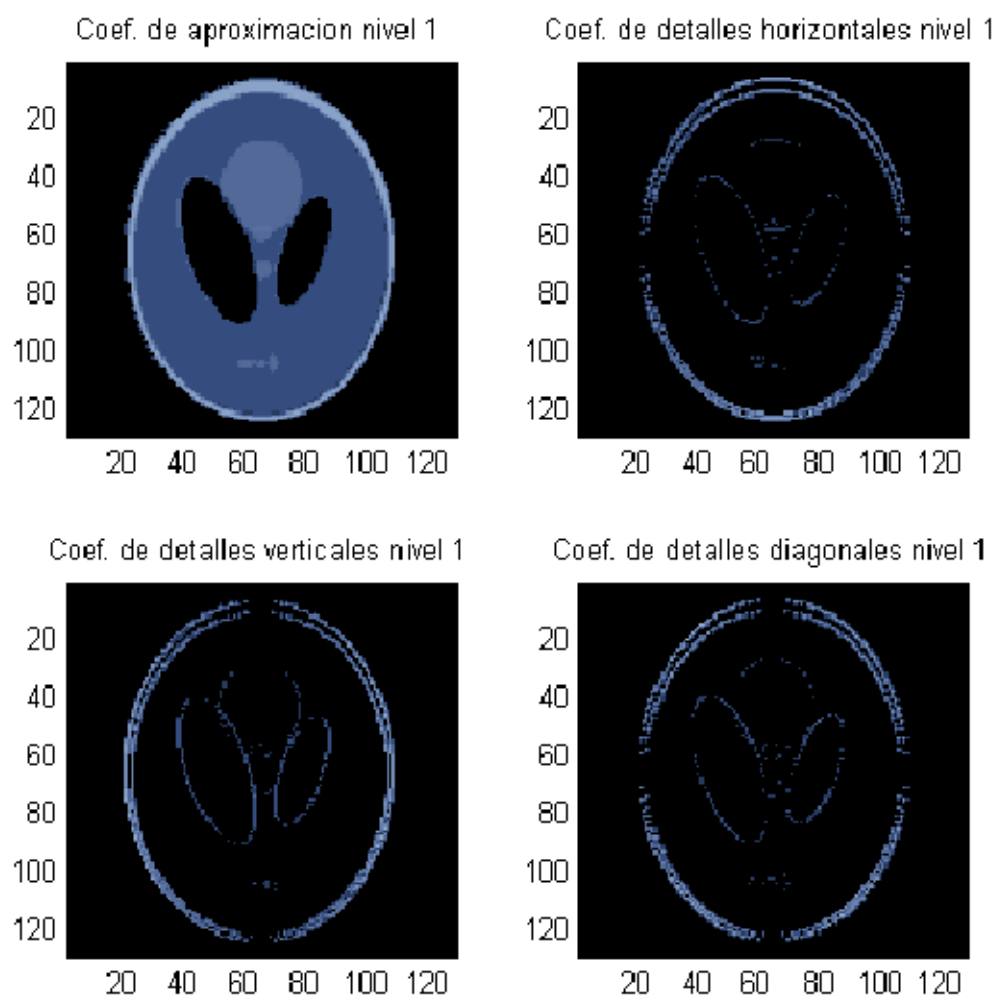


Figura 3.10: Descomposición del fantasma de Shepp-Logan nivel 1 usando una wavelet Daubechies 4

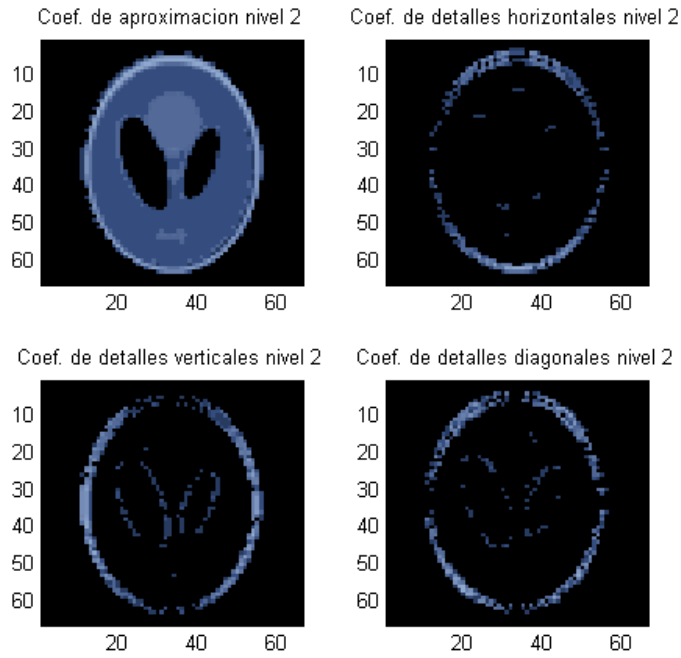


Figura 3.11: Descomposición del fantasma de Shepp-Logan nivel 2 usando una wavelet Daubechies 4

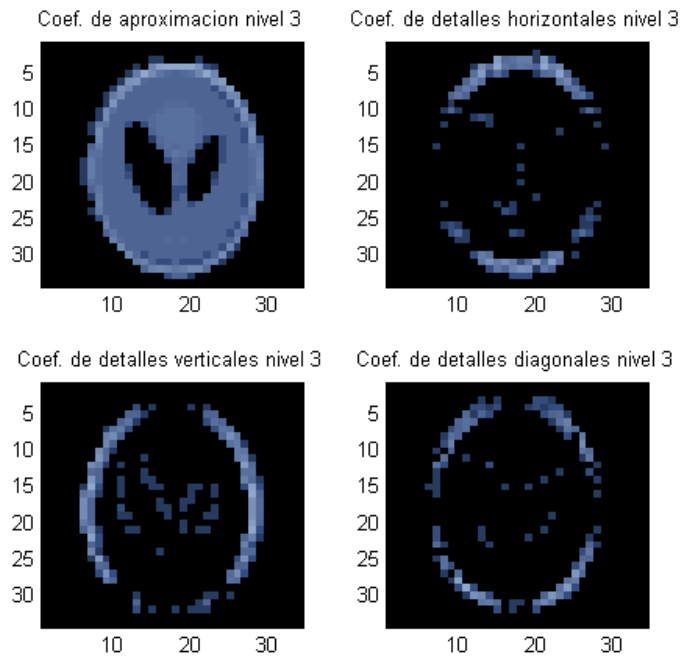


Figura 3.12: Descomposición del fantasma de Shepp-Logan nivel 3 usando una wavelet Daubechies 4

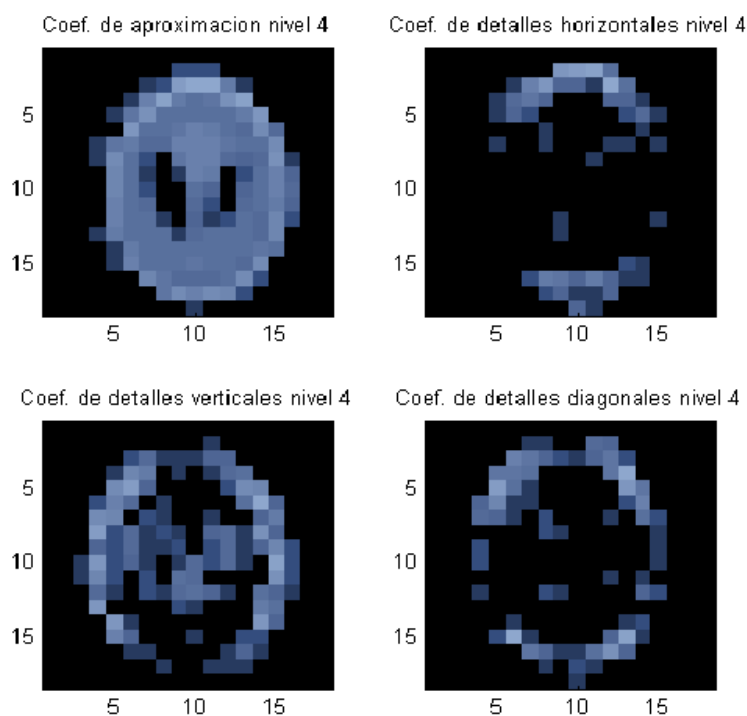


Figura 3.13: Descomposición del fantasma de Shepp-Logan nivel 4 usando una wavelet Daubechies 4

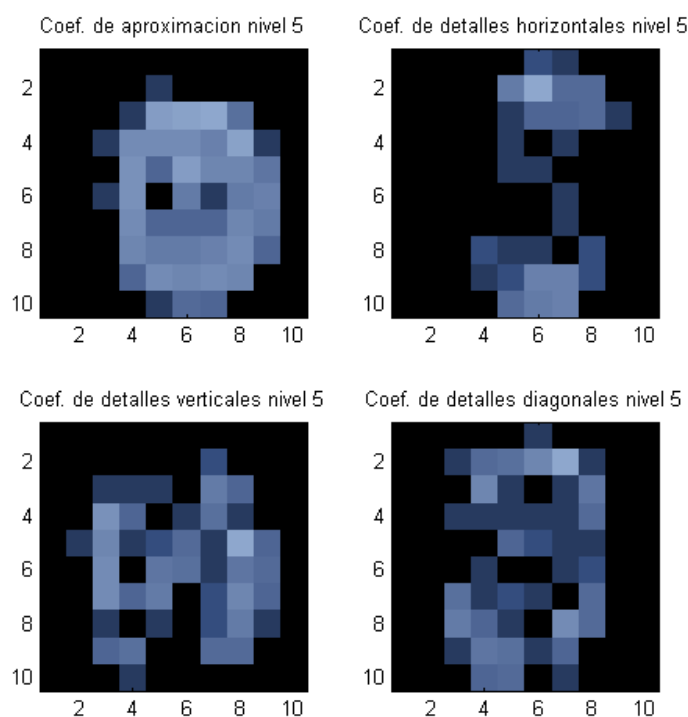


Figura 3.14: Descomposición del fantasma de Shepp-Logan nivel 5 usando una wavelet Daubechies 4

En las Figuras 3.15 y 3.16 se ilustra la descomposición del fantasma de Shepp-Logan modificado para nivel 1 usando las wavelets Daubechies 6 y Daubechies 10 respectivamente.

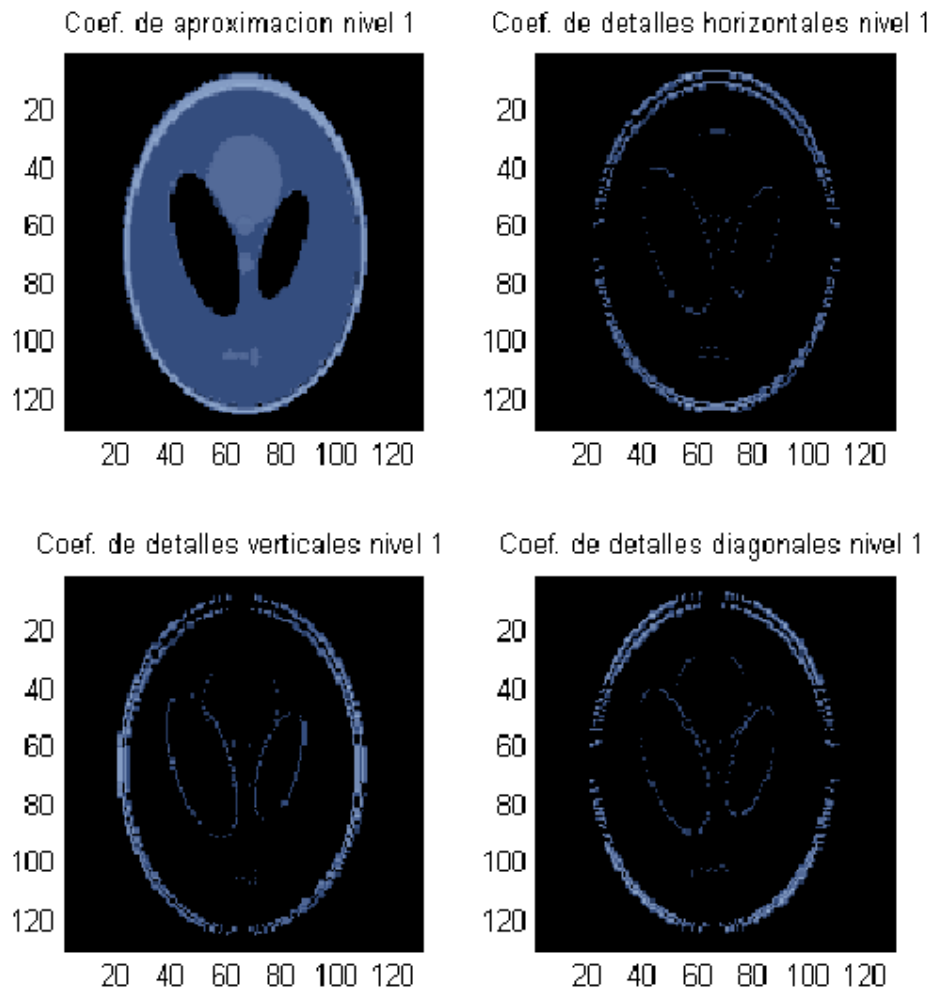


Figura 3.15: Descomposición del fantasma de Shepp-Logan nivel 1 usando una wavelet Daubechies 6

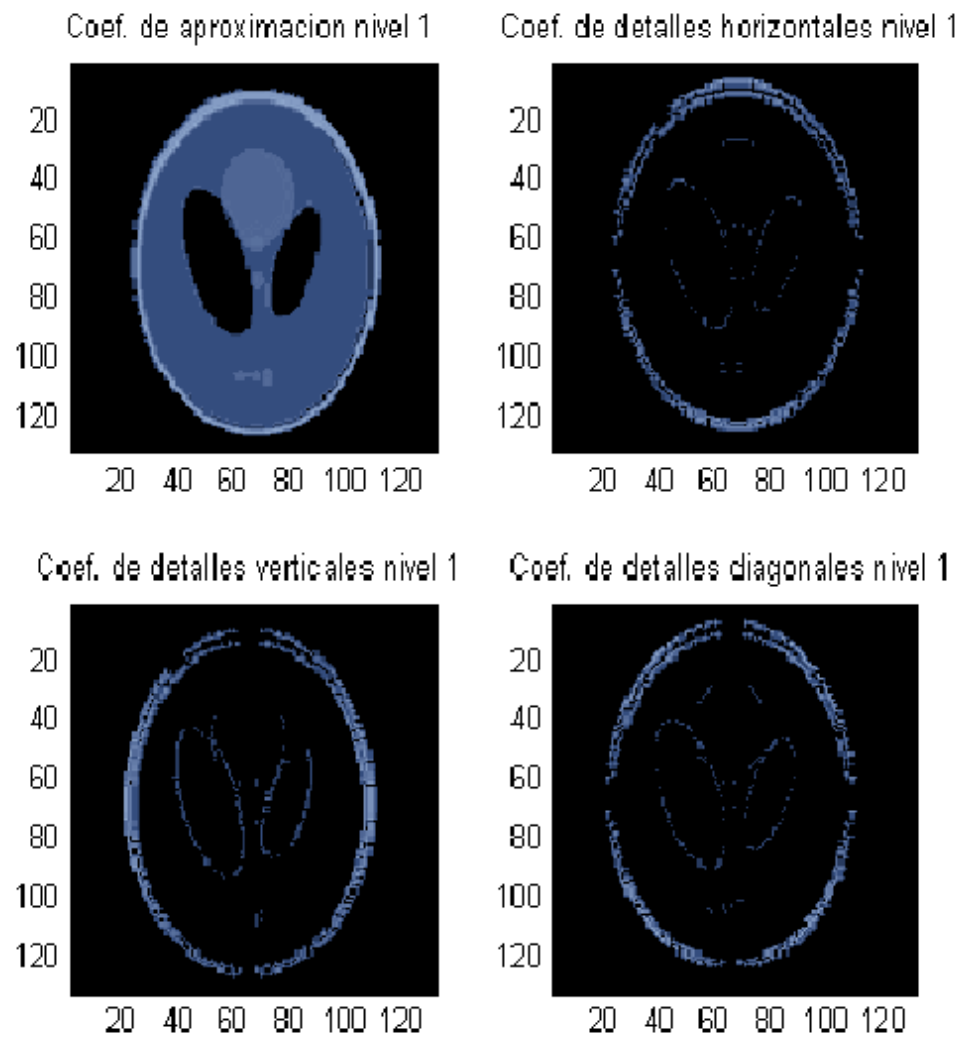


Figura 3.16: Descomposición del fantasma de Shepp-Logan nivel 1 usando una wavelet Daubechies 10

3.9.3. Descomposición de imágenes usando wavelets

Una función arbitraria $f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^2$ puede ser escrita como

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j,k} \sum_{i=1}^3 \langle f, \Psi_{j,k}^i \rangle \tilde{\Psi}_{j,k} \\ &= \sum_{j,k} \sum_{i=1}^3 \langle f, \tilde{\Psi}_{j,k}^i \rangle \Psi_{j,k}^i \end{aligned}$$

o también

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \langle f, \Phi_{j,k} \rangle \tilde{\Phi}_{j,k} + \sum_{j=-\infty}^J \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \sum_{i=1}^3 \langle f, \Psi^i \rangle \tilde{\Psi}_{j,k}^i$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi_{j,k}(x) &= \varphi_{j,k_1}(x_1) \varphi_{j,k_2}(x_2), \\ \Psi_{j,k}^1(x) &= \varphi_{j,k_1}(x_1) \Psi_{j,k_2}(x_2), \\ \Psi_{j,k}^2(x) &= \Psi_{j,k_1}(x_1) \varphi_{j,k_2}(x_2), \\ \Psi_{j,k}^3(x) &= \Psi_{j,k_1}(x_1) \Psi_{j,k_2}(x_2), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{j,k}(x) &= \tilde{\varphi}_{j,k_1}(x_1) \tilde{\varphi}_{j,k_2}(x_2), \\ \tilde{\Psi}_{j,k}^1(x) &= \tilde{\varphi}_{j,k_1}(x_1) \tilde{\Psi}_{j,k_2}(x_2), \\ \tilde{\Psi}_{j,k}^2(x) &= \tilde{\Psi}_{j,k_1}(x_1) \tilde{\varphi}_{j,k_2}(x_2), \\ \tilde{\Psi}_{j,k}^3(x) &= \tilde{\Psi}_{j,k_1}(x_1) \tilde{\Psi}_{j,k_2}(x_2). \end{aligned}$$

3.9.4. Coeficientes wavelet de la transformada de Radon

El teorema 3.9.3 muestra como los coeficientes wavelets de una función f pueden ser recuperados desde retroproyecciones de la transformada de Wavelet de $R_\theta f$ para cada ángulo θ .

Teorema 3.9.3. *Dadas $\varphi, \tilde{\varphi}, \Psi, \tilde{\Psi}$ con su análisis multirresolución y con $\Phi, \tilde{\Phi}, \Psi^i$ y $\tilde{\Psi}^i, i = 1, 2, 3$ definidas para cada ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ y las funciones $\sigma_\theta(t)$, y $\rho_\theta^i(t), i = 1, 2, 3$ por*

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_\theta(t) &= \frac{1}{2} |\gamma| \hat{\varphi}(\gamma \cos \theta) \hat{\varphi}(\gamma \sin \theta), \\ \hat{\rho}_\theta^1(\gamma) &= \frac{1}{2} |\gamma| \hat{\varphi}(\gamma \cos \theta) \hat{\Psi}(\gamma \sin \theta), \\ \hat{\rho}_\theta^2(\gamma) &= \frac{1}{2} |\gamma| \hat{\Psi}(\gamma \cos \theta) \hat{\varphi}(\gamma \sin \theta), \\ \hat{\rho}_\theta^3(\gamma) &= \frac{1}{2} |\gamma| \hat{\Psi}(\gamma \cos \theta) \hat{\Psi}(\gamma \sin \theta),\end{aligned}$$

y las funciones $\tilde{\sigma}_\theta(t)$, y $\tilde{\rho}_\theta^i(t)$ por

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{\sigma}}_\theta(t) &= \frac{1}{2} |\gamma| \hat{\tilde{\varphi}}(\gamma \cos \theta) \hat{\tilde{\varphi}}(\gamma \sin \theta), \\ \hat{\tilde{\rho}}_\theta^1(\gamma) &= \frac{1}{2} |\gamma| \hat{\tilde{\varphi}}(\gamma \cos \theta) \hat{\tilde{\Psi}}(\gamma \sin \theta), \\ \hat{\tilde{\rho}}_\theta^2(\gamma) &= \frac{1}{2} |\gamma| \hat{\tilde{\Psi}}(\gamma \cos \theta) \hat{\tilde{\varphi}}(\gamma \sin \theta), \\ \hat{\tilde{\rho}}_\theta^3(\gamma) &= \frac{1}{2} |\gamma| \hat{\tilde{\Psi}}(\gamma \cos \theta) \hat{\tilde{\Psi}}(\gamma \sin \theta).\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\langle f, \Phi_{j,k} \rangle &= 2^{-\frac{j}{2}} \int_0^{2\pi} (w_{\sigma_\theta} R_\theta f) (2^j, 2^j (k \cdot \theta)) d\theta, \\ \langle f, \Psi_{j,k}^i \rangle &= 2^{-\frac{j}{2}} \int_0^{2\pi} (w_{\rho_{\theta^i}} R_\theta f) (2^j, 2^j (k \cdot \theta)) d\theta, \\ \langle f, \tilde{\Phi}_{j,k} \rangle &= 2^{-\frac{j}{2}} \int_0^{2\pi} (w_{\tilde{\sigma}_\theta} R_\theta f) (2^j, 2^j (k \cdot \theta)) d\theta, \\ \langle f, \tilde{\Psi}_{j,k}^i \rangle &= 2^{-\frac{j}{2}} \int_0^{2\pi} (w_{\tilde{\rho}_{\theta^i}} R_\theta f) (2^j, 2^j (k \cdot \theta)) d\theta,\end{aligned}$$

para $i = 1, 2, 3$.

Fórmulas similares a estas son usadas en [20] como bases para un algoritmo de tomografía local.

La Figura 3.17 ilustra la gráfica de $\rho_\theta^1(t)$, donde $\Psi(t)$ y $\varphi(t)$ son los coeficientes de las funciones wavelet y de escala de la wavelet Daubechies 4. Para $\theta = 15^\circ, \theta = 30^\circ, \theta = 45^\circ, \theta = 60^\circ$.

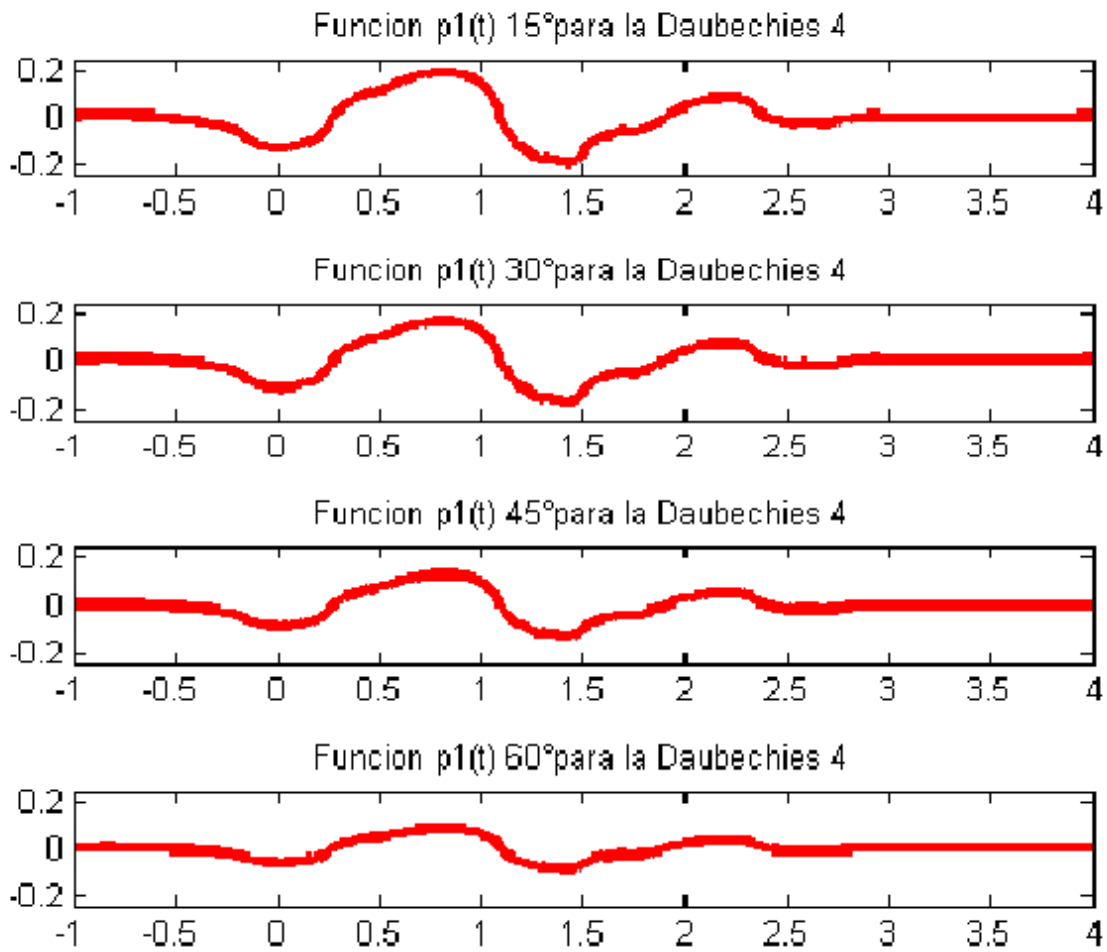


Figura 3.17: Funciones ρ^1 para las wavelets Daubechies 4 en los ángulos $\theta = 15^\circ, \theta = 30^\circ, \theta = 45^\circ$ y $\theta = 60^\circ$

La Figura 3.18 ilustra la gráfica de $\rho_\theta^1(t)$, donde $\Psi(t)$ y $\varphi(t)$ son los coeficientes de las funciones wavelet y de escala de la wavelet Daubechies 6. Para $\theta = 15^\circ, \theta = 30^\circ, \theta = 45^\circ, \theta = 60^\circ$.

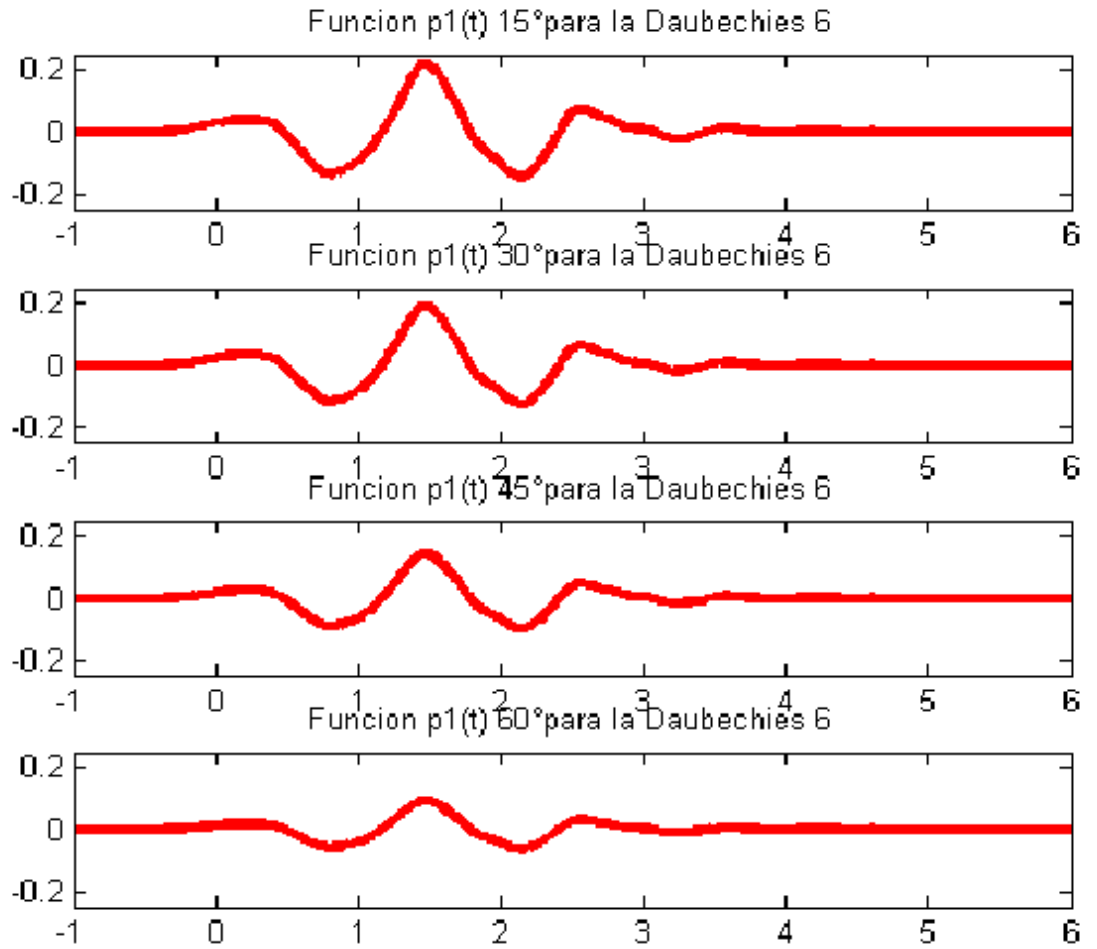


Figura 3.18: Funciones ρ^1 para las wavelets Daubechies 6 en los ángulos $\theta = 15^\circ, \theta = 30^\circ, \theta = 45^\circ$ y $\theta = 60^\circ$

La Figura 3.19 ilustra la gráfica de $\rho_\theta^1(t)$, donde $\Psi(t)$ y $\varphi(t)$ son los coeficientes de las funciones wavelet y de escala de la wavelet Daubechies 10. Para $\theta = 15^\circ, \theta = 30^\circ, \theta = 45^\circ, \theta = 60^\circ$.

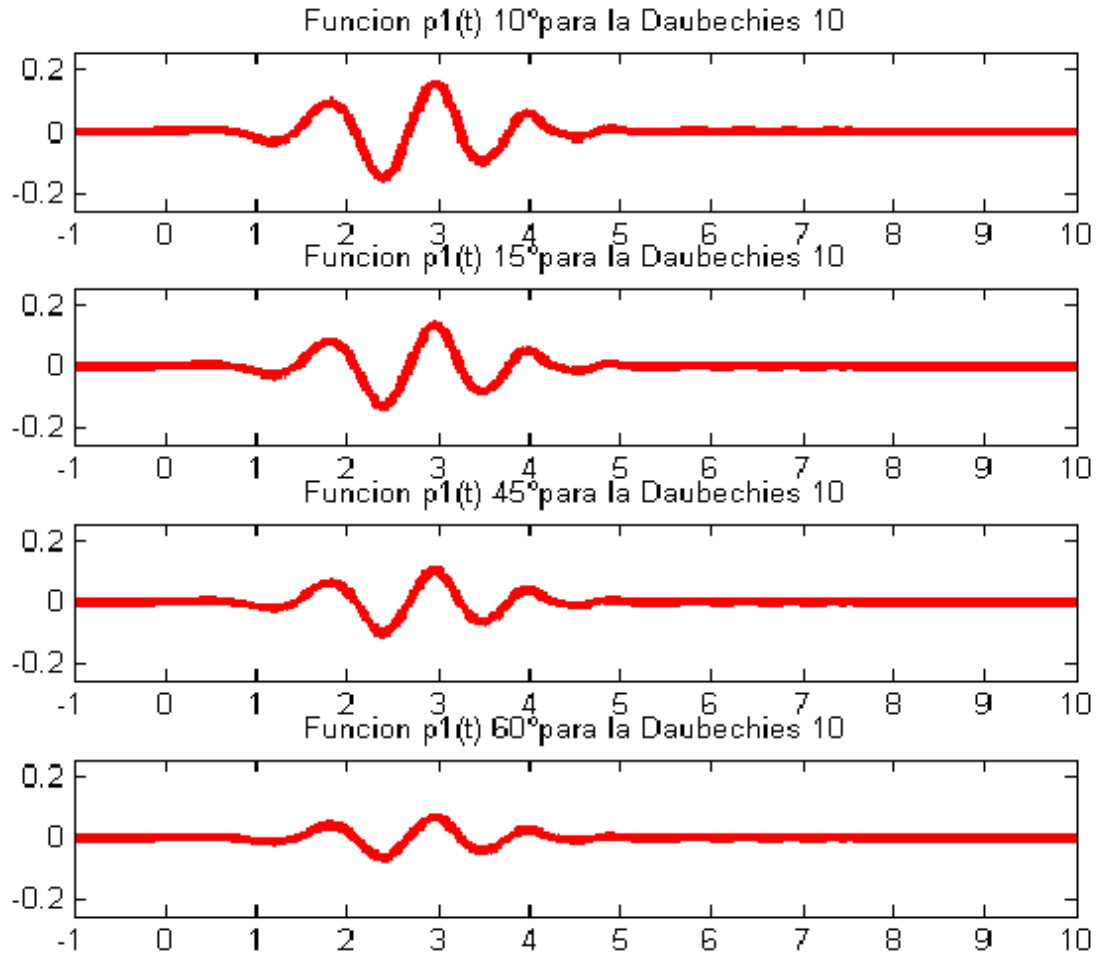


Figura 3.19: Funciones ρ^1 para las wavelets Daubechies 10 en los ángulos $\theta = 15^\circ, \theta = 30^\circ, \theta = 45^\circ$ y $\theta = 60^\circ$

CAPÍTULO 4

Resultados y Conclusiones

4.1. Introducción

En este capítulo se muestran las imágenes obtenidas usando el algoritmo de tomografía local propuesto en este trabajo, desarrollado con bases wavelets Daubechies de soporte compacto y muchos momentos de desvanecimiento. Estas bases permiten la reconstrucción local a partir de un conjunto reducido de proyecciones para dimensiones pares. El algoritmo fue diseñado usando el programa MATLAB R2009b.

4.2. Figuras de Pruebas

En la Figura 4.1 se ilustra la imagen llamada cabeza fantasma de Shepp-Logan (Shepp-Logan phantom) que contiene Matlab para la experimentación numérica de algoritmos de reconstrucción de imágenes tomográficas.

En la Figura 4.2 se ilustra la descomposición de la cabeza fantasma de Shepp-Logan en el primer nivel de resolución usando análisis multirresolución wavelet. Se aprecian los coeficientes de aproximación, los coeficientes de detalles horizontales, verticales y diagonales.

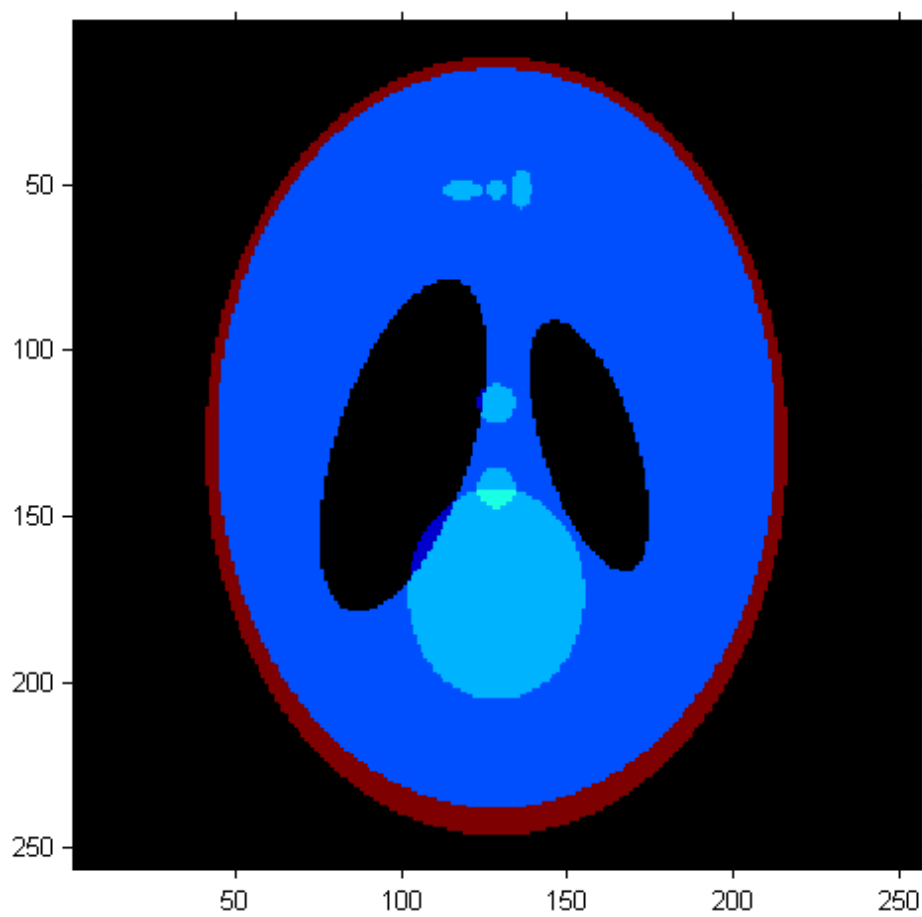


Figura 4.1: Cabeza fantasma de Shepp-Logan

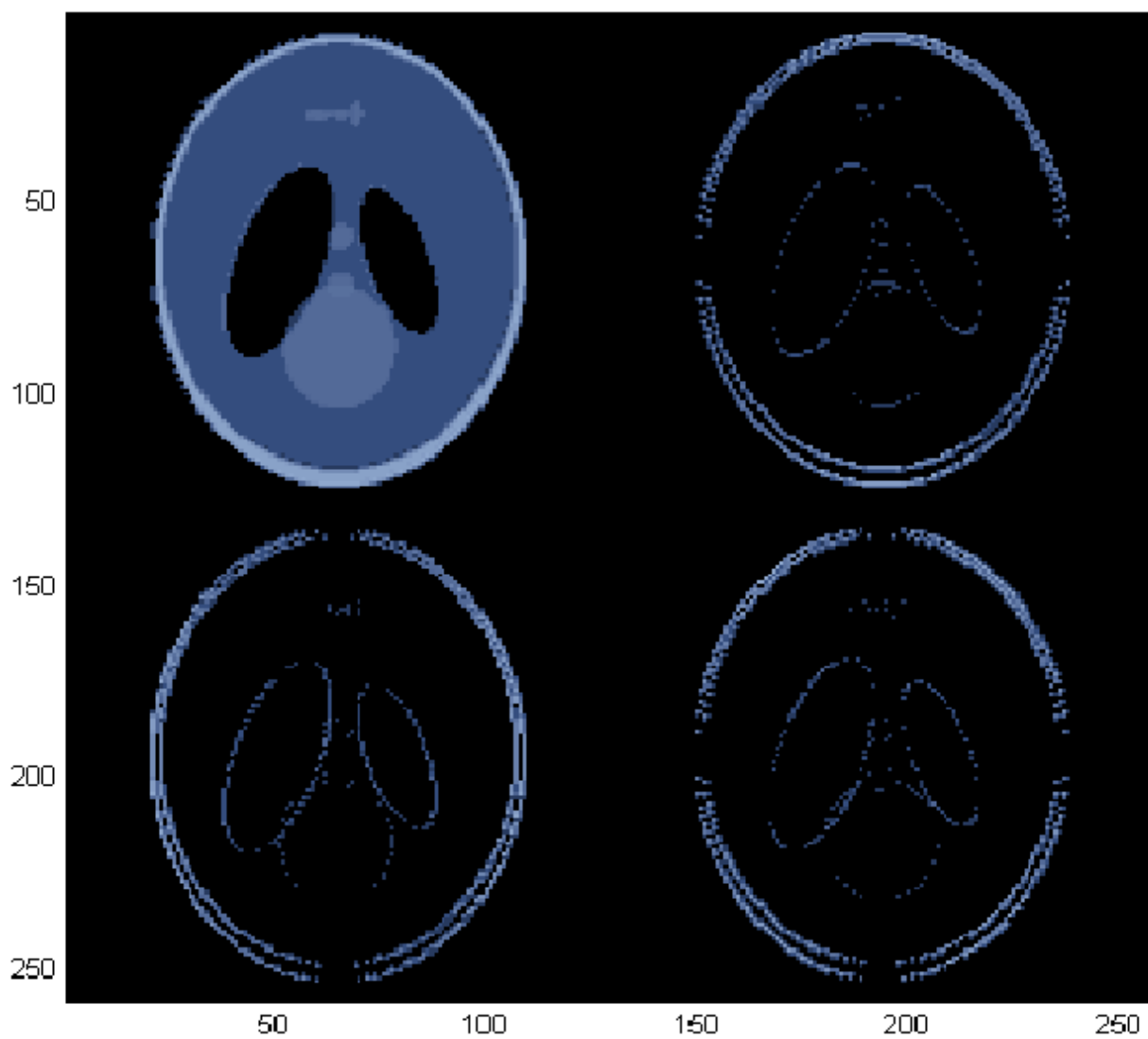


Figura 4.2: Descomposición de la cabeza fantasma de Shepp-Logan en el primer nivel de resolución

En la Figura 4.3 se ilustra una porción o región de 55x72 pixeles del fantasma de Shepp-Logan.

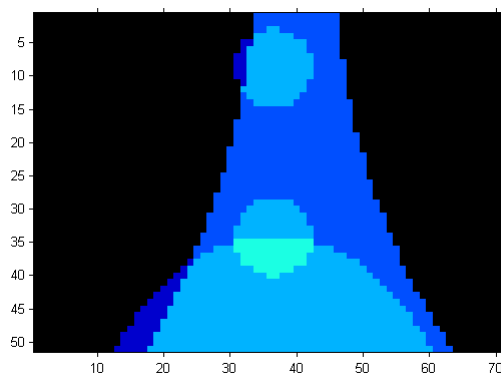


Figura 4.3: Región de 55x72 pixeles del fantasma de prueba

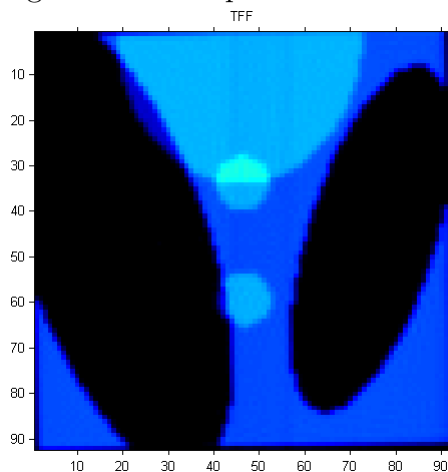


Figura 4.4: Región reconstruida con un algoritmo de retroproyección filtrada que usa FFT

En la Figura 4.4 se ilustra la imagen de una región de 91x91 del fantasma de prueba reconstruida con todas las proyecciones de la transformada de Radon usando un algoritmo de retroproyección filtrada. Este algoritmo interpola, filtra y aplica la transformada rápida de Fourier FFT.

4.3. Wavelet Daubechies 4

En la Figura 4.5 se ilustran las imágenes del algoritmo programado con la wavelet Daubechies 4 y se compara con la imagen reconstruida usando la FFT. La imagen fue reconstruida usando aproximadamente 46 % de las proyecciones de las líneas que pasan por el centro de la imagen.

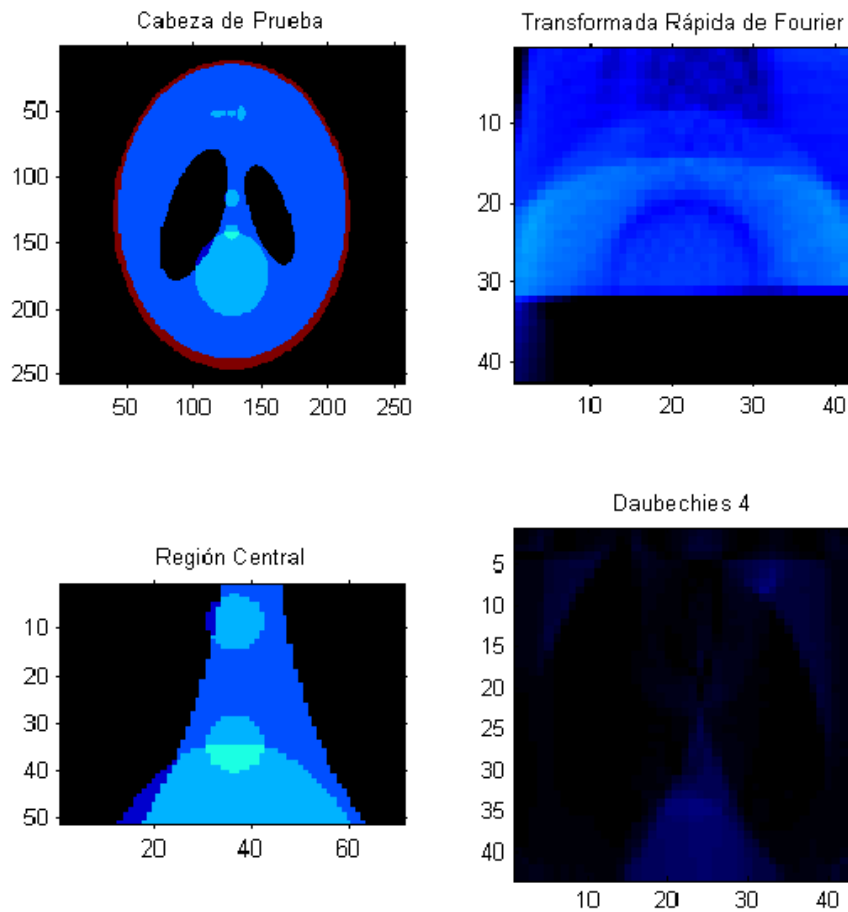


Figura 4.5: Imagen reconstruida usando aproximadamente 46 % de las proyecciones de las líneas que pasan por el centro de la imagen

En la Figura 4.6 se ilustran las imágenes del algoritmo programado con la wavelet Daubechies 4 y se compara con la imagen reconstruida usando la FFT. La imagen fue reconstruida usando aproximadamente 54% de las proyecciones de las líneas que pasan por el centro de la imagen.

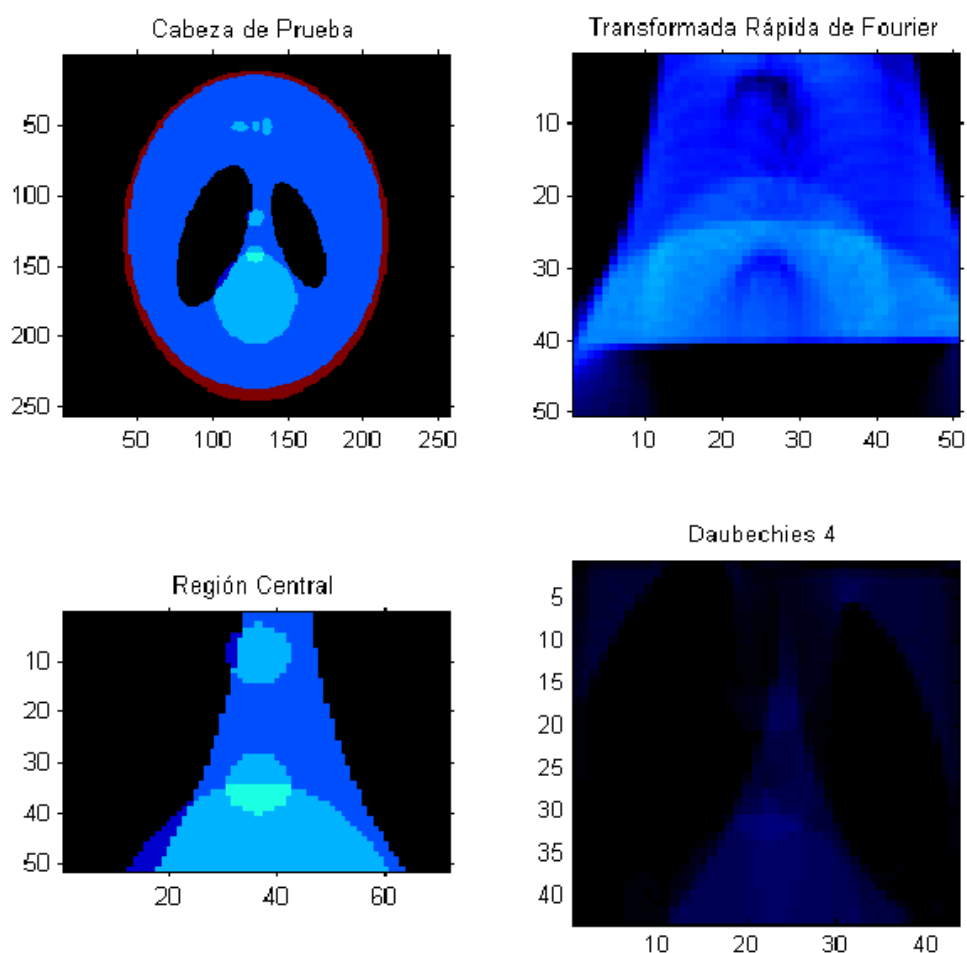


Figura 4.6: Imagen reconstruida usando aproximadamente 54% de las proyecciones de las líneas que pasan por el centro de la imagen

En la Figura 4.7 se ilustran las imágenes del algoritmo programado con la wavelet Daubechies 4 y se compara con la imagen reconstruida usando la FFT. La imagen fue reconstruida usando aproximadamente 62 % de las proyecciones de las líneas que pasan por el centro de la imagen.

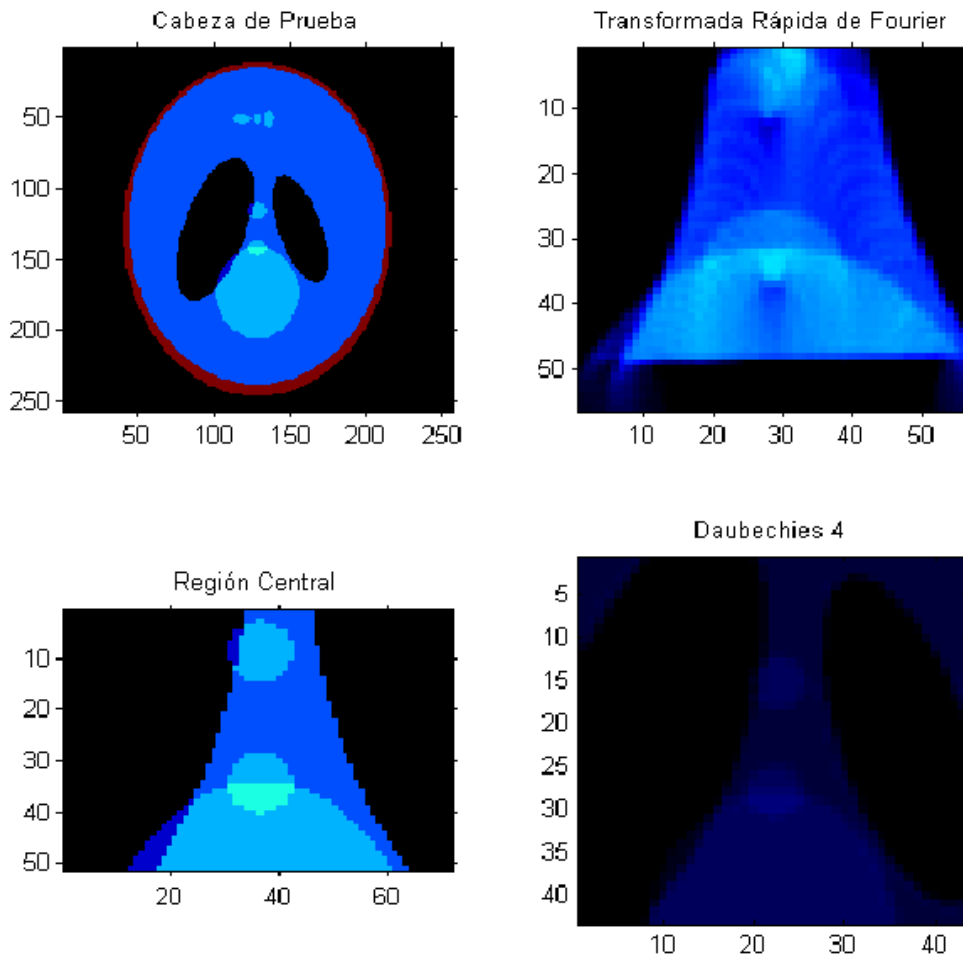


Figura 4.7: Imagen reconstruida usando aproximadamente 62 % de las proyecciones de las líneas que pasan por el centro de la imagen

4.4. Wavelet Daubechies 6

En la Figura 4.8 se ilustran las imágenes del algoritmo programado con la wavelet Daubechies 6 y se compara con la imagen reconstruida usando la FFT. La imagen fue reconstruida usando aproximadamente 46% de las proyecciones de las líneas que pasan por el centro de la imagen.

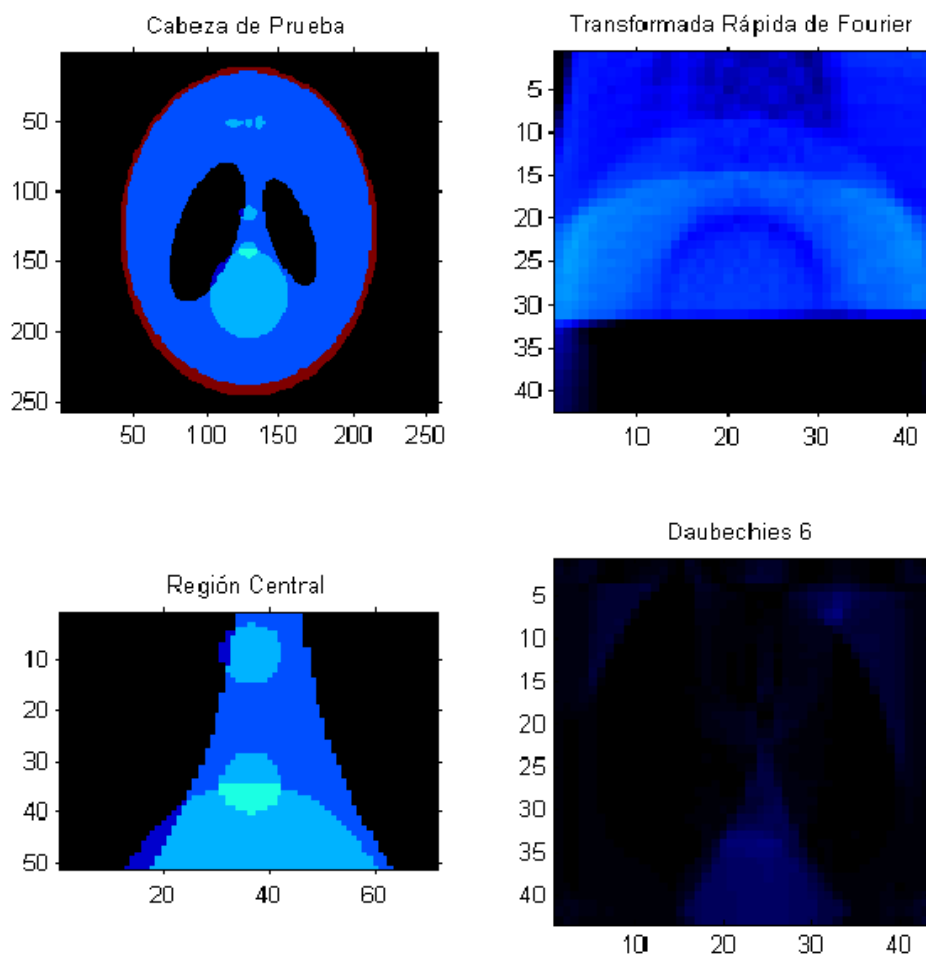


Figura 4.8: Imagen reconstruida usando aproximadamente 46% de las proyecciones de las líneas que pasan por el centro de la imagen

En la Figura 4.9 se ilustran las imágenes del algoritmo programado con la wavelet Daubechies 6 y se compara con la imagen reconstruida usando la FFT. La imagen fue reconstruida usando aproximadamente 54 % de las proyecciones de las líneas que pasan por el centro de la imagen.

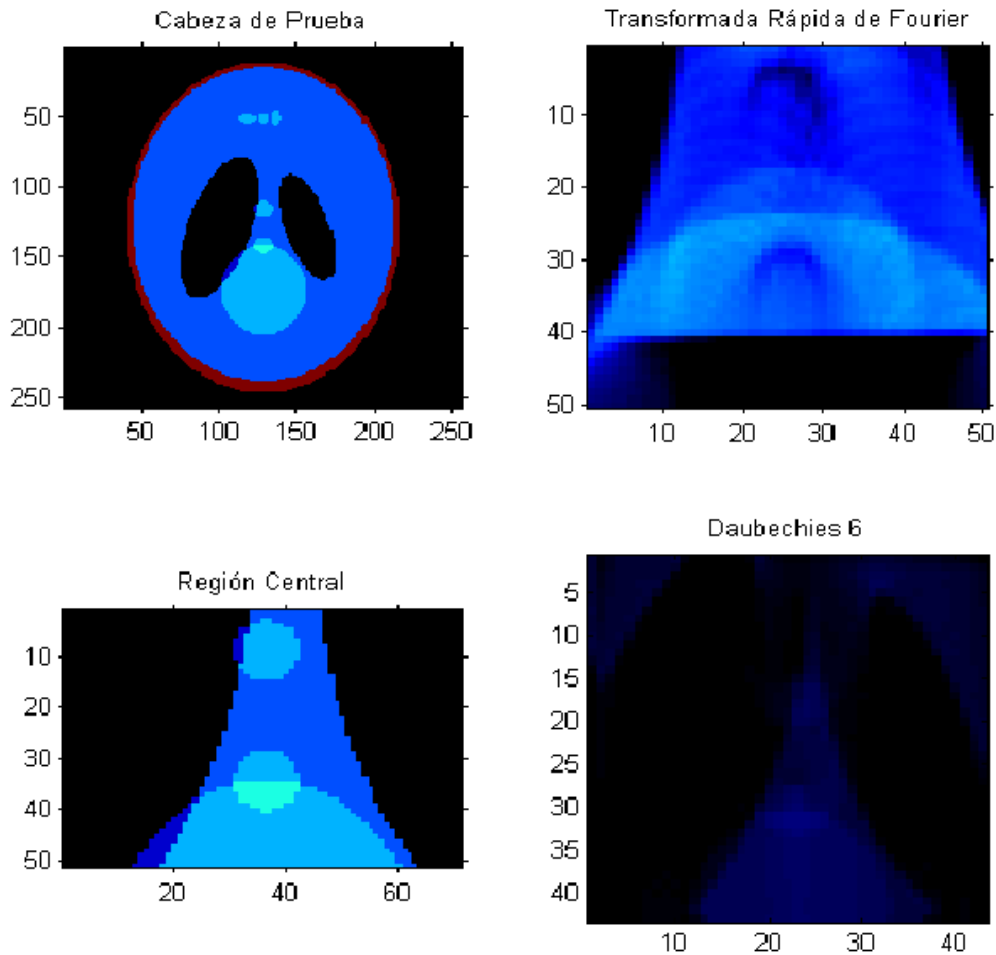


Figura 4.9: Imagen reconstruida usando aproximadamente 54 % de las proyecciones de las líneas que pasan por el centro de la imagen

82 Resultados y Conclusiones

En la Figura 4.10 se ilustran las imágenes del algoritmo programado con la wavelet Daubechies 6 y se compara con la imagen reconstruida usando la FFT. La imagen fue reconstruida usando aproximadamente 62% de las proyecciones de las líneas que pasan por el centro de la imagen.

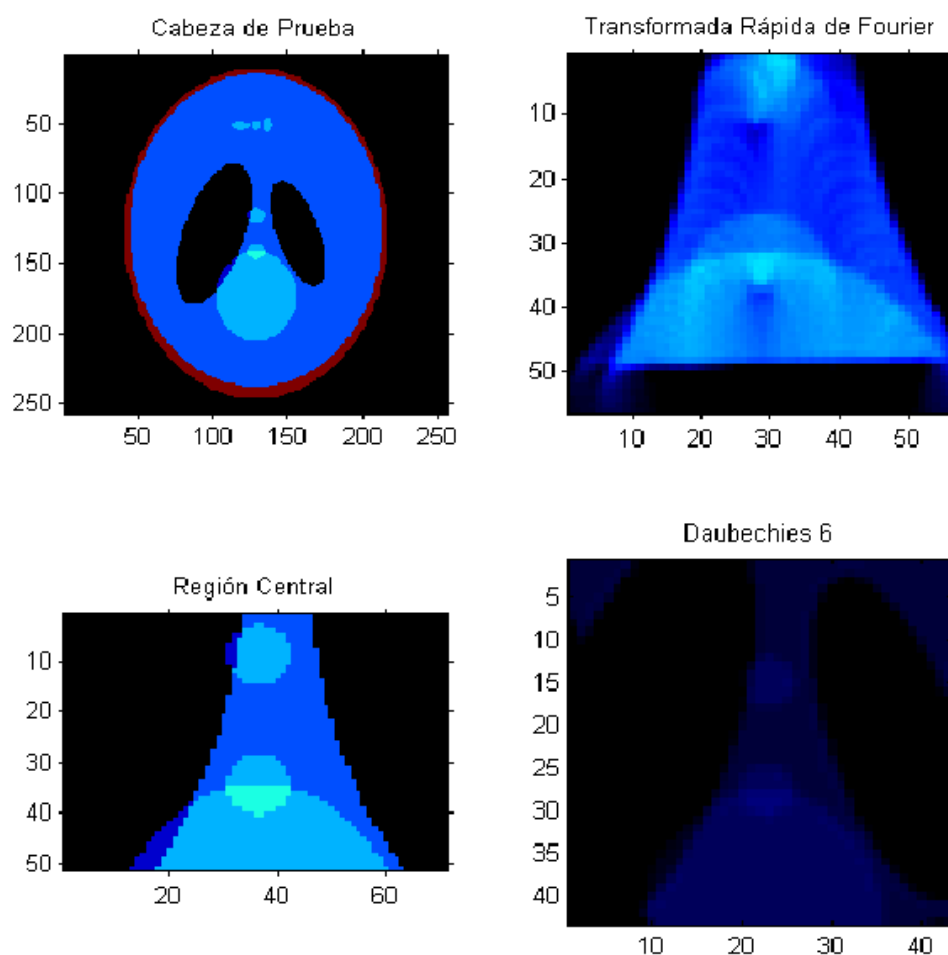


Figura 4.10: Imagen reconstruida usando aproximadamente 62% de las proyecciones de las líneas que pasan por el centro de la imagen

4.5. Wavelet Daubechies 10

En la Figura 4.11 se ilustran las imágenes del algoritmo programado con la wavelet Daubechies 10 y se compara con la imagen reconstruida usando la FFT. La imagen fue reconstruida usando aproximadamente 46 % de las proyecciones de las líneas que pasan por el centro de la imagen.

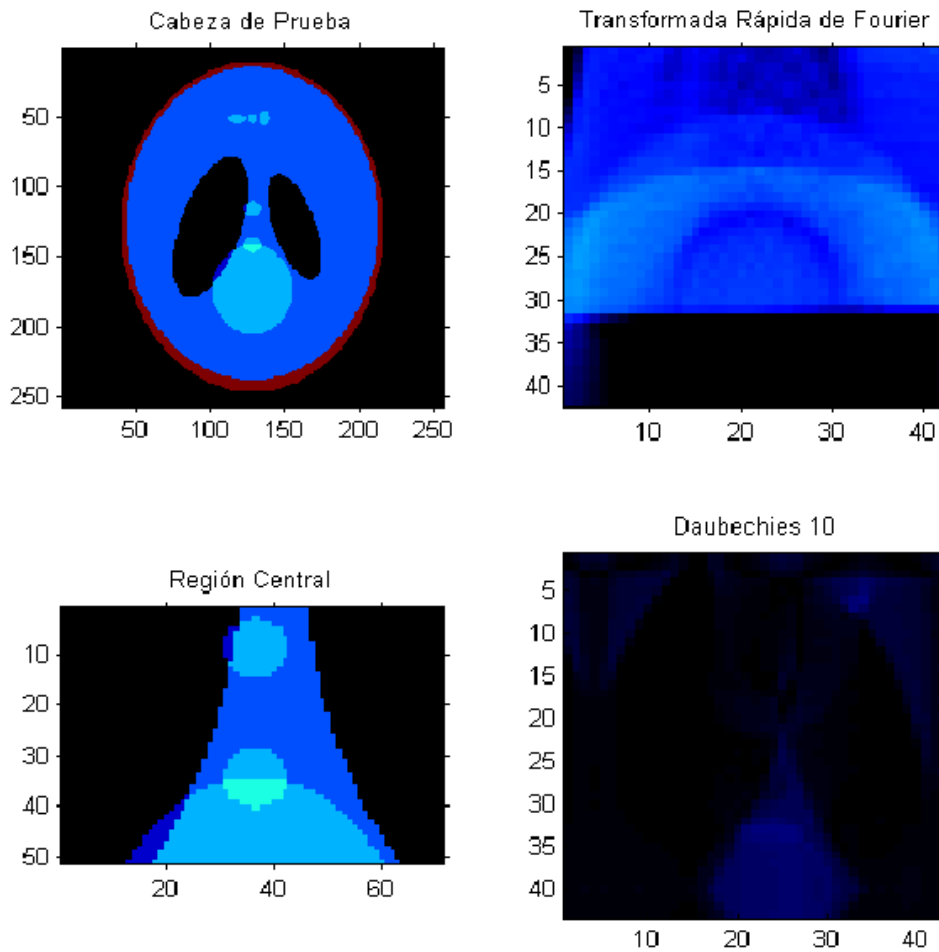


Figura 4.11: Imagen reconstruida usando aproximadamente 46 % de las proyecciones de las líneas que pasan por el centro de la imagen

En la Figura 4.12 se ilustran las imágenes del algoritmo programado con la wavelet Daubechies 10 y se compara con la imagen reconstruida usando la FFT. La imagen fue reconstruida usando aproximadamente 54% de las proyecciones de las líneas que pasan por el centro de la imagen.

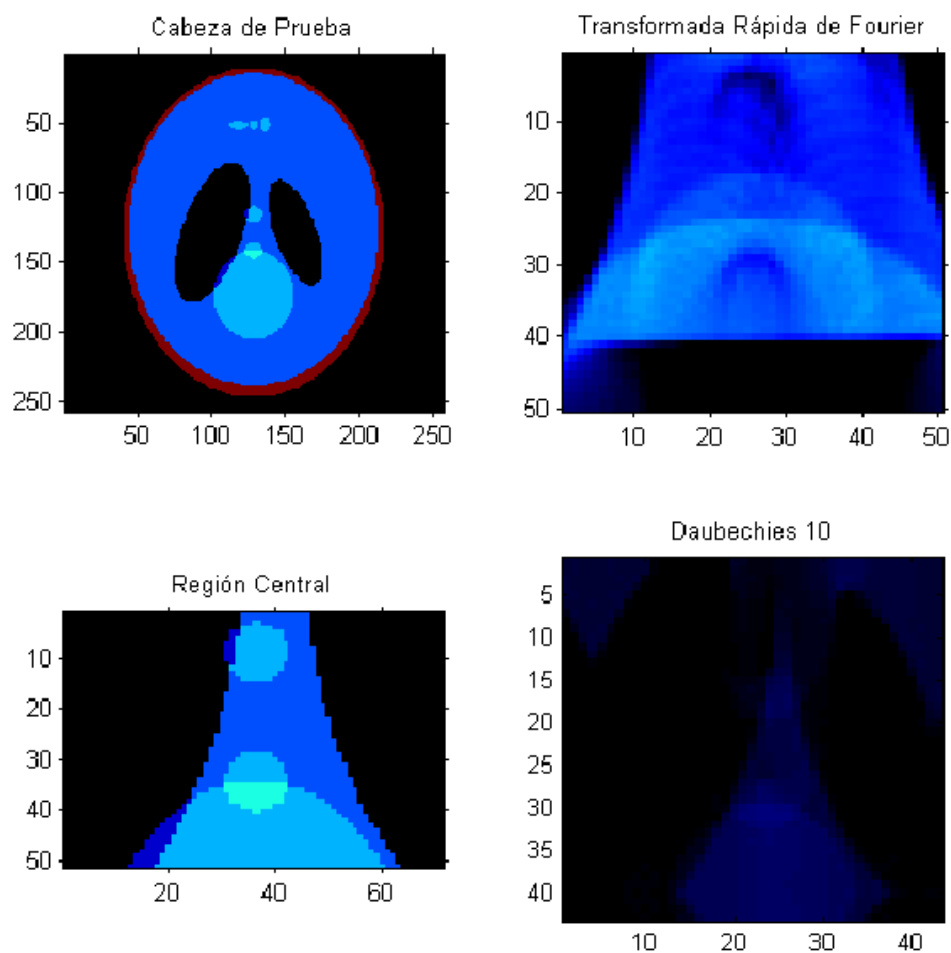


Figura 4.12: Imagen reconstruida usando aproximadamente 54% de las proyecciones de las líneas que pasan por el centro de la imagen

En la Figura 4.13 se ilustran las imágenes del algoritmo programado con la wavelet Daubechies 10 y se compara con la imagen reconstruida usando la FFT. La imagen fue reconstruida usando aproximadamente 62 % de las proyecciones de las líneas que pasan por el centro de la imagen.

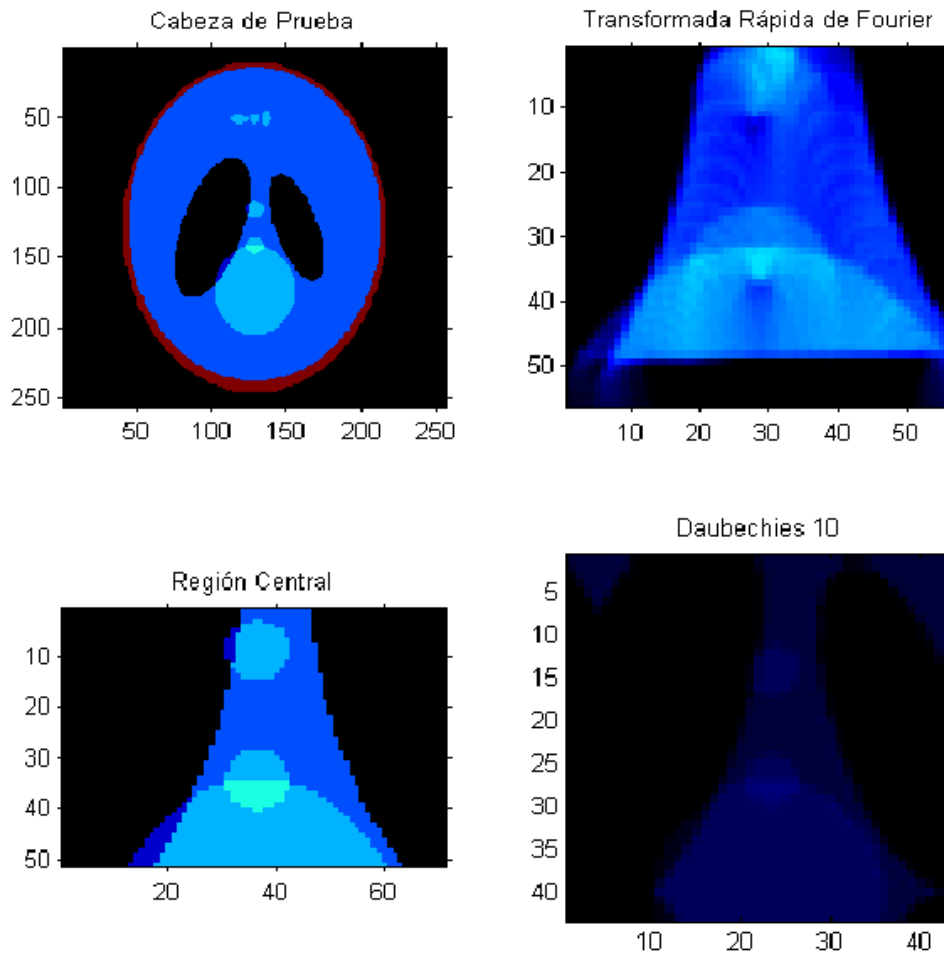


Figura 4.13: Imagen reconstruida usando aproximadamente 62 % de las proyecciones de las líneas que pasan por el centro de la imagen

4.6. Conclusiones

1. El diagnóstico médico continúa evolucionando con varios retos y desafíos así como la reconstrucción de imágenes funcionales para visualizar los órganos internos del cuerpo humano de una manera no invasiva, obteniendo información estructural y anatómica; por ejemplo la Tomografía Computarizada (TC).

2. El valor de la transformada de Radon en un punto t_1 para un determinado ángulo θ , se denomina rayo suma, y el conjunto de todos los rayos suma para una misma dirección θ se denomina proyección general $\mathcal{R}_\theta f(t)$, es decir: La transformada de Radon mapea el dominio espacial (x, y) hasta el dominio (t, θ) .

3. La transformada de Radon está estrechamente relacionada con la transformada de Fourier, debido a que la inversión de la transformada de Radon se relaciona con el teorema de cortes de Fourier que consiste en que la transformada unidimensional de Fourier de una proyección paralela de la imagen $f(x, y)$ tomada a un ángulo θ nos da el corte de la transformada bidimensional $F(u, v)$ subtendido en un mismo ángulo θ con el eje u .

4. El operador de retroproyección es un paso intermedio para la reconstrucción de la imagen $f(x, y)$, mientras que el operador de retroproyección filtrada reconstruye aproximadamente la imagen.

5. El operador potencial de Riesz I^α , es la generalización de la transformada de Fourier de una derivada de una función o derivadas fraccionales y nos sirve para el problema de decaimiento. Lo que mide es la velocidad de convergencia de una función.

6. El problema de la tomografía local es debido a que no se quiere exponer a un paciente a los efectos de los rayos X, esto se logra reconstruyendo la imagen local de la parte del cuerpo humano que se quiere diagnosticar.

7. El problema de la no localización en dimensiones pares es debido a que el operador potencial de Riesz no preserva soporte compacto para dimensiones pares, mientras que en dimensiones impares la transformada de Radon si es inversible localmente.

8. La transformada de wavelets $\Psi_{j,k}(t)$ es apropiada para representar detalles finos de una señal o imagen, gozan de la propiedad de zoom, es decir localizan y son buenos detectores de singularidades que llevan información esencial como presencia de esquinas en las imágenes, esto hace que las bases wavelets sean una herramienta muy útil para el procesamiento de imágenes.

9. El grado de localización depende de qué tan rápido decae el operador potencial de Riesz de las wavelets. Dicho de otra manera, los decaimientos del operador de Riesz dependen también de los momentos de desvanecimientos de las wavelets.

10. Las ventajas que tienen las wavelets Daubechies son: tienen soporte compacto, tienen un alto número de desvanecimientos, manejan ortogonalidad, biortogonalidad y simetría.

11. El algoritmo toma directamente los valores puntuales de una función f y emplea los coeficientes wavelets de la transformada de Radon para cada ángulo θ , obteniendo una aproximación de la imagen original.

12. En esta tesis se mostró un modelo con su respectivo algoritmo que usa bases wavelets de soporte compacto que permiten invertir la transformada de Radon. A partir de la transformada de Hilbert se construyeron wavelets que decaen rápidamente manteniendo el mismo soporte de las respectivas Daubechies 4, 6 y 10; solucionando el problema de analiticidad de la transformada inversa de Radon, junto con el de la invarianza frente a las dilataciones y traslaciones. Con las imágenes obtenidas del algoritmo se mostró que con un gran número de momentos de desvanecimientos de las wavelets se pueden reconstruir las imágenes en dimensiones pares usando datos locales de la transformada de Radon. Estas características (soporte compacto y momentos de desvanecimiento) de las wavelets permiten la implementación de algoritmos como el de este trabajo optimizando el tiempo computacional y disminuyendo la exposición de rayos X en los pacientes.

4.7. Trabajos futuros

Es de vital importancia, la acertada toma de decisiones del cirujano a la hora de programar una cirugía. Por lo tanto, el especialista se debe apoyar en la mejor evidencia posible sobre la evolución de la enfermedad del paciente. Por esta razón, es importante que día a día se puedan generar investigaciones en el campo de las imágenes de tomografía obtenidas mediante el procesamiento de datos con algoritmos computacionales. Las imágenes obtenidas no pueden ser borrosas y deben estar libres de ruidos, rayas, distorsiones u otras impurezas que afecten el diagnóstico del paciente.

Por lo anterior, es posible pensar en la localización de la imagen de tomografía como se trabajo en esta tesis, para futuros proyectos de investigacion enfocados en:

1. Mejorar la resolución de la imagen de tomografía para identificar objetos de interés.
2. Detectar cambios anormales en las características de los objetos comparando imágenes de diferentes fechas.
3. Diseñar filtros para eliminar ruidos y distorsiones en la imagen.
4. La reconstrucción local de imágenes tomográficas a partir de un conjunto reducido de proyecciones.
5. Restauración de la imagen original a partir de una imagen borrosa.
6. Descomposición de la imagen reconstruida en las diferentes partes que la constituyen (los objetos de interés y el fondo).

Bibliografía

- [1] Antonini, M., Barlaud, M., Mathieu, P., Daubechies, I. Image Coding Using Wavelet Transform, IEEE Transactions on Image Processing, Vol 1, No.2, April 1992, 205-220.
- [2] Aplicaciones de la Tomografía por emisión de positrones. <http://www.asacirujanos.es/articulos/versioniprimible.php>.
- [3] Assano. A. Pattern Information Processing. Computed Tomography-Image reconstruction from projections. 2007.
- [4] Berenstein, C. Technical Research Report: Randon Transorms, Wavelets, and Applications. ISR Sponsored by the National Science Foundation Engineering Research Center program, the University of Maryland, Harvard University, and Industry.
- [5] Berenstein, C.A., Ebenfelt, P.F., Gindikin, S.G., Helgason, S., Tumanov, A.E. Integral Geometry, Radon Transforms and Complex Analysis. E. Casadio Tarabusi, M.A. Picardello, G. Zampieri. Venice 1996. Fondazione C.I.M.E. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Alemania. 1998.
- [6] Berenstein, C.A., Walnut, D.F. Local inversion of the Radon Transform in even dimensions using wavelets. In 75 Years of the Radon Transform (Vienna, 1992). International Press Co., Ltd., 38-58 (1994).

-
- [7] Berenstein, C.A., Walnut, D.F. Wavelets and Local Tomography. 17 de August 1995.
 - [8] Bilgot, A., Desbat, L., Perrier, V. Filtered backprojection method and the interior problem in 2D tomography.
 - [9] Bilgot, A., Desbat, L., Perrier, V. Wavelets, Local Tomography and Interventional X-Ray Imaging.
 - [10] Boggess , Albert., Narcowich, FJ. A First Course in Wavelets with Fourier Análisis. New Jersey: Prentice Hall, 2001.
 - [11] Boman, J., Quinto, E.T. Support theorems for real-analytic Radon transforms. Duke J.Math, 1987.
 - [12] Bottema, M., Moran, B., Suvorova, S. An Application of Wavelets in Tomography. Australia. Article No. SP980326. Digital Signal Processing 8, 1998. 244-254.
 - [13] Cerutti, R. A. Sobre la inversión de potenciales causales de Riesz mediante integrales de Poisson. Argentina. Universidad Nacional del Nordeste. Comunicaciones Científicas y Tecnológicas 2006.
 - [14] Chui, C.K. Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Análisis. SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation, Philadelphia, 1997.
 - [15] Corbo Pereira, D.N. Tomografía Axial Computarizada. XIII Seminario de Ingeniería biomédica 2004. Facultad de Medicina e Ingeniería. Universidad de la Republica Oriental de Uruguay.
 - [16] Daubechies, I. Ten Lectures on Wavelets, CBMS-NFS Conference Series in Applied Mathematics 61, SIAM, Phildelphia 1992.
 - [17] Daubechies, I., Teschke, G. Variational image restoration by means of wavelets: simultaneous us decomposition, deblurring and denoising. December 2, 2004.
 - [18] De Castro, R. El Universo Látex. Segunda Edición. Bogotá: Universidad Nacional. 2003.

-
- [19] Deans, S. R. The Radon Transform: and some of its Applications. Primera edición. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1983.
 - [20] Delaney, A., Bresler, Y. Multiresolution tomographic reconstruction using wavelets. IEEE Trans. Image Process., Vol 4, No.6, Junio 1995. 799-813.
 - [21] Delost, M., Virieux, J., Operto, S. First-arrival Travel-Time Tomography using Second Generation Wavelets. Géosciences Azur, CNRS and UNSA, Sophia-Antipolis, France. October 31, 2007.
 - [22] DeStefano, J., Olson, T. Wavelet localization of the Radon transform. IEEE Trans. Signal Process., Vol.42, No.8:2055-2067, August 1994.
 - [23] Dini, A.L. Wavelets. Departamento de Hidráulica-Facultad de Ingeniería-UBA.
 - [24] Faridani, A. Introduction to the Mathematics of Computed Tomography. June 15, 2002.
 - [25] Faridani, A., Finch, D., Ritman, E., Smith, K. Local Tomography II. SIAM Journal on Applied Mathematics, Volume 57, No. 4, Aug., 1997, 1095-1127.
 - [26] Faridani, A., Ritman, E., Smith, K. Examples of Local Tomography . SIAM Journal on Applied Mathematics, Volume 52, No. 4, Aug., 1992, 1193-1198.
 - [27] Faridani, A., Ritman, E.L., Smith, K. T. Local Tomography. Society for Industrial and Applied Mathematics. SIAM Journal on Applied Mathematics. Vol.52, No.2, April 1992. 459-484.
 - [28] Faridani, K. A., Buglione, P. H., Ovidiu, D. L., McGrath, J. Introduction to Local Tomography. Contemporary Mathematics.
 - [29] 29. Farrokh-Rashid- Farrokhi. , Liu, K. J. R., Berenstein, C., Walnut, D. Wavelet Based Multiresolution Local Tomography. IEEE Trans. Image Processing. Vol .6, No.10, October 1997.
 - [30] Farrokh-Rashid- Farrokhi., Liu, K. J. R., Berenstein, C., Walnut, D. Localized Wavelet Based Computerized Tomography. Proc. ICIP95. Washington, DC, October 1995.

- [31] Fernández, J.L., Alberdi, J., Barcala, J.M. Desarrollo de algoritmos de reconstrucción de imágenes en tomografía de capacitancia eléctrica. Madrid.
- [32] Fetter, E., Gamboa, B. Introducción al Análisis Funcional y a la Geometría de Espacios de Banach. Grupo Editorial Iberoamérica, CIMAT, octubre de 1994.
- [33] Freeman, W., Adelson, E. The design and use of steerable filters. IEEE Trans. Patt, Anal, and Machine Intell., Vol.13, No.9, Sept., 1991. 891-906.
- [34] Galindo, U. S. Principios Matemáticos de la Reconstrucción de Imágenes Tomográficas. Ciencia Ergo Sum, Noviembre 2003-Febrero 2004, Vol.10, No.003. Universidad autónoma del Estado de México. ISSN:1405-0269.
- [35] Gopala, R.M.V., Tanuja, E.M.L., Vathsal, S. Wavelet-based Local Tomography. Indian Society for Non-Destructive testing Hyderabad Chapter. Proc-National Seminar on Non-Destructive Evaluation. Dec 7-9. 2006.
- [36] Guédon, J.P., Bizais, Y. Bandlimited and Haar Filtered Back-Projection Reconstructions. IEEE Transactions on Medical Imaging, Vol.13, No.3, September 1994.
- [37] Hasser, N. B., Sullivan, J. A. Análisis Real. Primera edición. México: Editorial Trillas, 1978.
- [38] Helgason, S. The Radon Transform. Second Edition. USA: Birkhauser, 1999.
- [39] Hernández, I., Cardona, A. Transformada de Ondículas. Editado por AMCA, Santa Fe, Argentina. Mecánica Computacional, Vol. 14, 1994, 638-645.
- [40] Kontaxakis, G., Vaquero, J.J., Santos, A. Reconstrucción de imagen en tomografía por emisión de positrones. Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fis. Nat (Esp). Vol.96, No.12. 2002. 45-57.

- [41] Kreyszig, E. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, Inc. Edition Published 1989.
- [42] Kuchment, P. Generalized Transforms of Radon Type and Their Applications. Proceedings of Symposis in Applied Mathematics.
- [43] Kuchment, P., Kunyansky, L. Mathematics of the Thermoacoustic Tomography. USA. February 1, 2008.
- [44] Kuchment, P., Quinto, E.T. Some problems of integral geometry arising in tomography. Chapter XI.USA.
- [45] Lerones, P. M., Parradinas, C., Gómez, J. Formación de la Imagen en Tomografía Computarizada vía la Transformada de Radon. Valladolid, España.
- [46] Lesmes, J. Análisis Funcional. Segunda Edición. Bogotá: Octubre de 2004.
- [47] López, B., De Armas, R. Algoritmo para detectar eventos Epilépticos a partir de Wavelets analizando la función de energía. Universidad EAFIT-Medellín. 2009.
- [48] Lugo, E., Playa y Li., Rivero. Aplicación de la tomografía eléctrica a la prospección de formaciones evaporíticas. Geogaceta, 44. 2008.223-226. ISSN: 0213683X.
- [49] Maass, Peter. The Interior Radon Transform. Society for Industrial and Applied Mathematics. SIAM Journal on Applied Mathematics. Vol.52, No.3, Junio 1992. 710-724.
- [50] Mallat, S., Hwang, W. Singularity Detection and Processing with Wavelets. IEEE Trans. Information theory, Vol.38, No.2, March 1992. 617-643.
- [51] Mallat, S., Zhong, S. Characterization of Signals from Multiscale Edges. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. Vol.14, No.7, July 1992.
- [52] Masami, U., Suresh, L. Wavelets: An Elementary Introduction and Examples. Baskin Center for Computer Engineering & Information

- Sciences University of California, Santa Cruz, CA 95064, USA. January 17, 1995. UCSC-CRL 94-47.
- [53] Natterer, F. The Mathematics of Computerized Tomography. John Wiley & Sons, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1986.
 - [54] Nievergelt, Y. Wavelets Made Easy. Boston. Basel. Berlin, Birkhauser.
 - [55] Oeckl, S., Schón, T., Ezrt, F., Furth, D., Knauf, A., Fiedrich, A., Louis, A. Multiresolution 3D-Computerized Tomography and its Application to NDT. ECNDT 2006. We.3.7.3.
 - [56] Olson, T. Optimal time-frequency projections for localized tomography. Departament of Mathematics and Computer Science. Dartmouth College Hanover. NH 03755. e-mail: olson@tortuga.dartmouth.edu.
 - [57] Orrison, W. Jr. Neurorradiología. Primera Edición, Madrid-España, Harcourt, S.A. Vol. 1, 2001.
 - [58] Peyrin, F., Bonnet, S., Turjman, F., Prost, R. Tomographic Reconstruction Using Nonseparable Wavelets. IEEE Transactions on image processing, Vol.9, No.8, August 2000. 1445-1450.
 - [59] Porres, J.A. Caracterización de cavidades en el subsuelo mediante la interpretación de perfiles de tomografía eléctrica. Aplicación al yacimiento arqueológico de Clunia. Universidad Burgos, Escuela Politécnica Superior-Campus de San Amaro. 2002.
 - [60] Putinar, M. A Renormalized Riesz Potential and Applications. Advances in Constructive Approximation. XXX(eds). Nashboro Press, Brentwood, T.N. 2004. 1-33. ISBN 0-9728482-x-x.
 - [61] Quinto, E. T. Singularities of the X Ray Transform and Limited Data Tomography in R^2 and R^3 . SIAM J. Math. Analysis, 24: 1993. 1215-1225.
 - [62] Quinto, E.T. Local Algorithms in Exterior Tomography. ELSEVIER. ScienceDirect . Departament of Mathematics, Tufts University, Medford, MA 02155, USA. Journal of Computational and Applied Mathematics 199. 2007. 141-148.
 - [63] Quinto, E.T. Radon Transforms, Differential Equations, and Microlocal Analysis. American Mathematical Society. 2000.

- [64] Ramm, A. G., Airapetyan, R. Singularities of the Radon Transform. *Applicable Analysis*, 79, N3-4, 2001, 351-379.
- [65] Ramm, A.G. New methods for finding discontinuities of functions from local tomographic data. *J. Inv. III-Posed Problems, VSP*. Vol 5, No.2. 1997. 165-175.
- [66] Ramm, A.G., Zaslavsky, A.I. Reconstructing Singularities of a Function from its Radon Transform. *Math. And Comput, Modelling*, 18, N1, 1993, 109-138.
- [67] Ramm, A.G., Zaslavsky, A.I. Singularities of the Radon Transform. Appeared in bulletin of the American Mathematical Society. Vol.28, No.1, January 1993. 109-115.
- [68] Reddy, B.D. *Introductory Functional Analysis with Applications to Boudary Value Problems and Finite Elements*, Springer-Verlag New York, Inc. 1998.
- [69] Rillo Pastor, Noelia. *Introducción a la Teoria de Wavelets*. Departamento de Matemática Aplicada y Análisis Universitat de Barcelona. Curso 2005/06.
- [70] Rudin. W. *Análisis Funcional*. Reverté, S.A.Barcelona-Bogotá-Buenos Aires-Caracas-México-Rio de Janeiro. 1979.
- [71] Saito, N., Beylkin, G. Multiresolution Representations using the Auto-Correlation Functions of Compactly Supported Wavelets. Submitted to the special issue of *IEEE Trans. Signal Processing on Wavelets and Signal Processing*. August 15, 1992.
- [72] Salgado, J., Contreras, E., Vizcarra, M. Ensayos-Aplicaciones de la Tomografía geoelectrica 2-d al estudio del subsuelo. *Tomografía Geoelectrica 2.d. Temas de Ciencia y Tecnología*. Vol 6. No.17. Agosto 2002. 11-16.
- [73] Samko, S.G. A new approach to the inversion of the Riesz potential operator. *Frac. Calc. And Applied Anal.* Vol.1, No.3, 1998, 225-245.
- [74] Strahlen,K. *Local Vector Tomography by use of Wavelets*. Centre for Mathematical Sciences, Mathematics Lund Institute of Technology. Sweden.

-
- [75] Takeuchi, Y. Análisis Matemático. Sexta edición. Bogotá: Universidad Nacional, 2008. ISBN 978-958-719-044-1.
 - [76] Transformada Wavelet Curso 2006. Introducción a la Transformada Wavelet. Descomposición de Señales.
 - [77] Unser, M. Approximation Power of Biorthogonal Wavelet Expansions. IEEE Transactions on Signal Processing. Vol. 44, No.3, March 1996.
 - [78] Unser, M. Wavelets, Statistics, and Biomedical Applications. Biomedical Engineering and Instrumentation Program, NCRR, Bldg 13, Room 3N17. aNational Institutes of Health, Bethesda. MD 20892-5766 USA.
 - [79] Unser, M., Blu, T. Construction of fractional spline wavelet bases. Biomedical Imaging Group. Swiss Federal Institute of Technology Lausanne.
 - [80] Valenzuela, H. Distribuciones de Green y Aplicaciones. Hermosillo, Sonora, México. Octubre 2001.
 - [81] Velasco, M.P. Modelos Diferenciales y Funciones especiales en el ámbito del cálculo fraccionario. Universidad Complutense de Madrid. Septiembre 2008.
 - [82] Walnut, D. Applications of Gabor and Wavelet Expansions to the Radon Transform. In Probabilistic and Stochastic Methods in Analysis with Applications, J.S. Byrnes et al., editors. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1992. 187-205.
 - [83] Yaeli, S. Radon Transform and Filtered Back-Projection. Advanced Topics in Sampling (049029). Winter 2008.
 - [84] Zähle, M. Riesz Potentials and Liouville Operators on Fractals. Mathematical Institute, University of Jena, D-07740 Jena, Germany.
 - [85] Zhao, S., Welland, G., Wang, G. Wavelet Sampling and Localization Schemes for the Radon transform in two Dimensions. SIAM, J.Appl. math. Vol 57, No.6. December 1997. 1749-1762.